This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Math
5109
00

Sammlung Göschen

Ebene Geometrie

Mit 111 zweifarbigen Figuren

von

Prof. G. Mahler.

Math 5109.00

SCIENCE CENTER LIBRARY

BOUGHT WITH THE INCOME

FROM THE BEQUEST OF

PROF. JOHN FARRAR, LL.D.,

AND HIS WIDOW,

ELIZA FARRAR,

FOR

"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF MATHEMATICS, ASTRONOMY, AND NATURAL PHILOSOPHY."

Sammlung Göschen.

Je in elegantem Leinwandband **80 Pf.**

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

33 **Deutsche Geschichte** im Mittelalter von Dr. F. Kurze.

36 **Herder, Cid.** Herausg. von Dr. E. Naumann.

37 **Chemie, anorganische** von Dr. Jos. Klein.

38 **Chemie, organische** von Dr. Jos. Klein.

39 **Zeichenschule** mit 17 Tafeln in Ton-, Farben- und Golddruck und 135 Voll- und Textbildern von R. Kimmich.

40 **Deutsche Poetik** von Dr. K. Borinski.

41 **Geometrie** von Prof. Mahler. Mit 115 zweifarb. Fig.

42 **Urgeschichte der Menschheit** von Dr. M. Hörnes Mit 48 Abbildgn.

43 **Geschichte des alten Morgenlandes** von Prof. Dr. Fr. Hommel. Mit 6 Bildern und 1 Karte.

44 **Die Pflanze,** ihr Bau u. ihr Leben v. Dr. W. Dennert. Mit 96 Abbildungen.

45 **Römische Altertumskunde** von Dr. Leo Bloch. Mit 7 Vollbildern.

46 **Das Walthariliedim** Versmaße der Urschrift übersetzt u. erl. v. Prof. Dr. H. Althof.

47 **Arithmetik u. Algebra** von Prof. Dr. H. Schubert.

48 **Beispielsammlung zur „Arithmetik u. Algebra"** von Prof. Dr. H. Schubert.

49 **Griechische Geschichte** von Prof. Dr. H. Swoboda.

50 **Schulpraxis** von Schuldirektor R. Seyfert.

51 **Mathem. Formelsammlung** v. Prof. O. Bürklen. Mit 17 Fig.

52 **Römische Litteraturgeschichte** von Herm. Joachim.

53 **Niedere Analysis** von Dr. Benedikt Sporer. Mit 8 Fig.

54 **Meteorologie** von Dr. W. Trabert. Mit 49 Abbild. und 7 Tafeln.

55 **Das Fremdwort im Deutschen** von Dr. Rud. Kleinpaul.

56 **Dtsche. Kulturgeschichte** von Dr. Reinh. Günther.

57 **Perspektive** v. Hans Freyberger. Mit 88 Fig.

58 **Geometrisches Zeichnen** von Hugo Becker. Mit 282 Abb.

59 **Indogermanische Sprachwissenschaft** von Prof. Dr. R. Meringer.

60 **Tierkunde** v. Dr. Franz v. Wagner. Mit 78 Abbild.

61 **Deutsche Redelehre** von Hans Probst. Mit einer Tafel.

62 **Länderkunde v. Europa.** Mit 14 Textkärtchen und Diagrammen und einer Karte der Alpeneinteilung. Von Professor Dr. Franz Heiderich

63 **Länderkunde der außereurop. Erdteile.** Mit 11 Textkärtchen u. Profilen. V. Prof. Dr. Franz Heiderich.

64 **Kurzgefaßtes Deutsches Wörterbuch.** Von Dr. H. Detter.

65 **Analytische Geometrie** der Ebene von Prof. Dr. M. Simon. Mit 40 Fig.

66 **Russische Grammatik** von Dr. Erich Berneker.

67 **Russisches Lesebuch** von Dr. Erich Berneker.

68 **Russisches Gesprächbuch** von Dr. Erich Berneker.

69 **Englische Litteraturgeschichte** von Prof. Dr. Karl Weiser.

70 **Griechische Litteraturgeschichte** von Prof. Dr. Alfred Gercke.

Wenden!

Sammlung Göschen. Je in elegantem Leinwandband 80 Pf

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

71 **Chemie, Allgemeine u. physikalische,** von Dr. Max Rudolphi.

72 **Projektive Geometrie** von Dr. Karl Doehlemann. Mit 57 zum Teil zweifarbigen Figuren.

73 **Völkerkunde** von Dr. Michael Haberlandt. Mit 56 Abbildungen.

74 **Die Baukunst d. Abendlandes** von Dr. A. Schäfer. Mit 22 Abb.

75 **Die Graphischen Künste** von Carl Kampmann. Mit 3 Beilagen und 39 Abbildungen.

76 **Theoretische Physik,** I. Teil: Mechanik und Akustik. Von Prof. Dr. Gustav Jäger. Mit vielen Abbildgn.

77 **Theoretische Physik,** II. Teil: Licht und Wärme. Von Prof. Dr. Gustav Jäger. Mit vielen Abbildgn.

78 **Theoretische Physik,** III. Teil: Elektricität und Magnetismus. Von Prof. Dr. Gustav Jäger. Mit vielen Abbildgn.

79 **Gotische Sprachdenkmäler** mit Grammatik, Uebersetzung u. Erläuterungen v. Dr. Hermann Jantzen.

80 **Stilkunde** von Karl Otto Hartmann. Mit zahlr. Abbildgn. und Tafeln.

81 **Logarithmentafeln,** vierstellige, von Prof. Dr. Hermann Schubert. In zweifarb. Druck.

82 **Lateinische Grammatik** von Prof. Dr. W. Votsch.

83 **Indische Religionswissenschaft** von Prof. Dr. Edmund Hardy.

84 **Nautik** von Direktor Dr. Franz Schulze. Mit 56 Abbildgn.

85 **Französische Geschichte** von Prof. Dr. R. Sternfeld.

86 **Kurzschrift.** Lehrbuch der vereinfachten deutschen Stenographie (System Stolze-Schrey) von

87 **Höhere Analysis I:** Differentialrechnung. Von Dr. Frdr. Junker. Mit 63 Fig.

88 **Höhere Analysis II:** Integralrechnung. Von Dr. Frdr. Junker. Mit 85 Figuren.

89 **Analytische Geometrie des Raumes** von Prof. Dr. M. Simon. Mit 28 Abbildungen.

90 **Ethik** von Prof. Dr. Th. Achelis.

91 **Astrophysik,** die Beschaffenheit d. Himmelskörper von Prof. Dr. Walter F. Wislicenus.

92 **Mathemat. Geographie** zusammenhängend entwickelt und mit geordneten Denkübungen versehen von Kurt Geißler.

93 **Deutsches Leben im 12. Jahrhundert** Kulturhist. Erläuterungen z. Nibelungenlied u. zur Kudrun. Von Prof. Dr. Jul. Dieffenbacher. Mit vielen Abbildgn.

94 **Photographie.** Von P. Keßler. Mit Lichtdruckbeilage u. zahlr. Abbildgn.

95 **Paläontologie.** Von Prof. Dr. Rud. Hoernes. Mit vielen Abbildgn.

96 **Bewegungsspiele** von Prof. Dr. E. Kohlrausch. Mit 14 Abbildungen.

97 **Stereometrie** von Dr. Glaser. Mit 44 Figuren.

98 **Grundriß der Psychophysik** von Dr. G. F. Lipps.

99 **Trigonometrie** von Dr. Gerh. Hessenberg. Mit vielen Figuren.

100 **Sächsische Geschichte** von Rektor Prof. Dr. O. Kaemmel.

101 **Sociologie** von Prof. Dr. Th. Achelis.

102 **Geodäsie** von Prof. Dr. E. Reinher

Kleine mathematische Bibliothek

aus der **Sammlung Göschen.**

Jedes Bändchen elegant gebunden 80 Pfennig.

Ebene Geometrie mit 115 zweifarbigen Figuren von Prof. G. Mahler. Zweite Auflage. Nr. 41.

Arithmetik und Algebra von Professor Dr. Hermann Schubert. Zweite Auflage. Nr. 47.

Beispiel-Sammlung zur **Arithmetik** und **Algebra** v. Prof. Dr. Herm. Schubert. Zweite Aufl. Nr. 48.

Formelsammlung u. **Repetitorium** der **Mathematik** mit 20 Fig. v. Prof. Bürklen. Zweite Aufl. Nr. 51.

Niedere Analysis mit 6 Figuren von Dr. Benedikt Sporer. Nr. 53.

Geometrisches Zeichnen mit 282 Figuren v. Architekt H. Becker. Nr. 58.

Analytische Geometrie der Ebene mit 45 Figuren von Prof. Dr. M. Simon. Nr. 65.

Projective Geometrie in synthetischer Behandlung mit 57 Figuren von Dr. K. Doehlemann. Nr. 72.

Vierstellige Logarithmen von Professor Dr. Hermann Schubert. In zweifarbigem Druck. Nr. 81.

Höhere Analysis I: Differentialrechnung mit 63 Figuren von Prof. Dr. Friedr. Junker. Nr. 87.

Höhere Analysis II: Integralrechnung mit vielen Figuren von Prof. Dr. Friedr. Junker. Nr. 88.

Analytische Geometrie des Raumes mit 28 Abbild. von Prof. Dr. M. Simon. Nr. 89.

Mathematische Geographie zusammenhängend entwickelt und mit geordneten Denkübungen versehen von Kurt Geissler. Nr. 92.

Stereometrie mit 44 Figuren von Dr. Glaser. Nr. 97.

Trigonometrie mit 69 ein- und zweifarbigen Figuren von Dr. Gerh. Hessenberg. Nr. 99.

Geodäsie mit 66 Abbildungen von Prof. Dr. C. Reinhertz.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung in Leipzig.

Sammlung Göschen 41.

Ebene Geometrie

von

G. Mahler
Professor der Mathematik am Gymnasium in Ulm

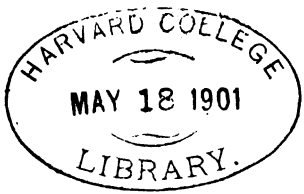
Mit 111 zweifarbigen Figuren

Dritte, verbesserte Auflage

Leipzig
G. J. Göschen'sche Verlagshandlung
1900

~~Math 5087.2~~
Math 5109.00

Alle Rechte, insbesondere das Uebersetzungsrecht, vorbehalten.



Farrar fund

Inhalt.

I. Abschnitt.

Symmetrie und Kongruenz.

		Seite
1. Kapitel.	Der Kreis. Der geometrische Ort	9
§ 1.	Entstehung	9
§ 2.	Uebungen	11
2. Kapitel.	Der Winkel	12
§ 3.	Entstehung und Bezeichnung	12
§ 4.	Einteilung der Winkel	12
§ 5.	Winkelvergleichung	13
§ 6.	Winkel und Kreis	14
§ 7.	Operationen mit Winkeln	14
§ 8.	Nebenwinkel, Scheitelwinkel	15
§ 9.	Ergänzungswinkel	16
§ 10.	Uebungen	17
3. Kapitel.	Von den Figuren im allgemeinen	18
§ 11.	Bezeichnung	18
§ 12.	Uebungen	19
4. Kapitel.	Zentrische Symmetrie	20
§ 13.	Erklärungen	20
§ 14.	Winkelpaare an drei Linien	20
§ 15.	Parallele Geraden	21
§ 16.	Hauptsätze von den Parallelen	21

Seite

§ 17. Kehrsätze von den Parallelen 22
§ 18. Der unendlich ferne Punkt 24
§ 19. Geschichtliche Bemerkungen 25
§ 20. Die Winkel im Dreieck 25
§ 21. Aussenwinkel eines Dreiecks 26
§ 22. Einteilung der Dreiecke 26
§ 23. Die Winkel eines Vielecks 27
§ 24. Uebungen 27

5. Kapitel. Axiale Symmetrie 29
§ 25. Einführung 29
§ 26. Beziehungen zwischen den Gegenstücken eines Dreiecks 30
§ 27. Das gleichschenklige und das gleichseitige Dreieck 31
§ 28. Entfernung eines Punktes von einer Geraden . . . 32
§ 29. Das Mittellot und die Winkelhalbierende als geometrische Oerter 33
§ 30. Zwei merkwürdige Punkte im Dreieck 34
§ 31. Aufgaben 35
§ 32. Uebungen 36

6. Kapitel. Kongruenz 39
§ 33. Hilfssatz 39
§ 34. Parallelverschiebung 39
§ 35. Drehung um einen beliebig grossen Winkel 41
§ 36. Drehung von Strecken und Winkeln 42
§ 37. Kongruenz der Dreiecke 43
§ 38. Erster Kongruenzsatz 44
§ 39. Zweiter Kongruenzsatz 45
§ 40. Dritter Kongruenzsatz 45
§ 41. Vierter Kongruenzsatz 46
§ 42. Aufgaben über das Dreieck 47
§ 43. Bezeichnung der Höhen, Transversalen etc. eines Dreiecks 48
§ 44. Uebungen 48

7. Kapitel. Das Parallelogramm und das Trapez . . 50
§ 45. Sätze über das Parallelogramm 50
§ 46. Kehrsätze 51
§ 47. Einteilung der Parallelogramme 52
§ 48. Eigenschaften der gleichseitigen Parallelogramme 52
§ 49. Eigenschaften der rechtwinkligen Parallelogramme 53
§ 50. Konstruktion der Parallelogramme 54
§ 51. Sätze über das Trapez 54

Seite

§ 52. Teilung einer Strecke 55
§ 53. Das gleichschenklige Trapez 56
§ 54. Konstruktion der Trapeze 57
§ 55. Uebungen 57

8. Kapitel. Der Kreis 60
§ 56. Kreis und Gerade 60
§ 57. Die Sehne 60
§ 58. Der Kreis durch drei Punkte 61
§ 59. Gleiche Sehnen 62
§ 60. Die Tangente 62
§ 61. Konstruktion der Tangente 63
§ 62. Der Peripheriewinkel 64
§ 63. Der Tangentenwinkel 65
§ 64. Geometrische Oerter 66
§ 65. Aufgabe 66
§ 66. Das Sehnenviereck 66
§ 67. Das Tangentenviereck 67
§ 68. Zwei Kreise 67
§ 69. Geometrische Oerter 69
§ 70. Gemeinschaftliche Tangenten 70
§ 71. Die Berührungskreise des Dreiecks 71
§ 72. Uebungen 72

9. Kapitel. Regelmässige Vielecke 76
§ 73. Eigenschaften 76
§ 74. Kehrsätze 77
§ 75. Konstruktion zweier Reihen regulärer Polygone . . 77
§ 76. Uebungen 78

10. Kapitel. Die Gleichheit der Inhalte 79
a. Vergleichung der Inhalte 79
§ 77. Einführung 79
§ 78. Die Gleichheit der Parallelogramme und Dreiecke 80
§ 79. Geometrischer Ort 81
§ 80. Die Pythagoreischen Sätze 81
§ 81. Anwendung auf das schiefwinklige Dreieck 83
b. Verwandlung der Figuren 84
§ 82. Aufgaben 84
c. Teilung der Figuren 87
§ 83. Aufgaben 87
§ 84. Uebungen 88

II. Abschnitt.

Aehnlichkeit.

Seite

11. Kapitel. Proportionale Strecken, erzeugt durch Parallellinien 92
§ 85. Das Messen der Strecken 92
§ 86. Der Proportionalsatz 93
§ 87. Kehrsatz 95
§ 88. Aufgaben 96
§ 89. Transversalen 97
§ 90. Medianen 97
§ 91. Uebungen 98

12. Kapitel. Proportionale Strecken, erzeugt durch Wechsellinien 101
§ 92. Erklärungen 101
§ 93. Wechsellinien am Dreieck und am Kreis 102
§ 94. Aufgabe 104
§ 95. Die stetige Teilung 104
§ 96. Aufgabe 105
§ 97. Das regelmässige Zehn- und Fünfzehneck 106
§ 98. Bemerkungen zum goldenen Schnitt 107
§ 99. Uebungen 108

13. Kapitel. Aehnlichkeit der Vielecke 110
§ 100. Einführung 110
§ 101. Die Aehnlichkeit der Dreiecke 110
§ 102. Aufgabe 112
§ 103. Satz des Ptolemäus 113
§ 104. Uebungen 113

14. Kapitel. Die Ausmessung geradliniger Figuren 115
§ 105. Das Verhältnis von Inhalten 115
§ 106. Die Berechnung von Inhalten 118
§ 107. Der Inhalt eines Dreiecks 119
§ 108. Uebungen 120

15. Kapitel. Die Ausmessung des Kreises 122
§ 109. Berechnung regelmässiger Vielecke 122
§ 110. Die Rektifikation des Kreises 124
§ 111. Die Quadratur des Kreises 126
§ 112. Berechnung der Kreisteile 127
§ 113. Uebungen 127

III. Abschnitt.

Die geometrische Aufgabe.

		Seite
16. Kapitel.	Wesen und Behandlung der Aufgabe	130
§ 114.	Einführung	130
§ 115.	Teile der Auflösung	131
§ 116.	Methoden der Lösung	132
§ 117.	Die Methode der Oerter	132
§ 118.	Anwendung	135
§ 119.	Uebungen	137
§ 120.	Die Methode der Parallelverschiebung	139
§ 121.	Uebungen	141
§ 122.	Die Methode der Umklappung	143
§ 123.	Uebungen	145
§ 124.	Die Methode der Drehung	147
§ 125.	Aufgaben	148
§ 126.	Uebungen	150
§ 127.	Die Methode der Rechnung	151
§ 128.	Konstruktion algebraischer Ausdrücke	152
§ 129.	Untersuchung des für x gefundenen Ausdrucks	154
§ 130.	Aufgaben	154
§ 131.	Uebungen	157

Ebene Geometrie.

I. Abschnitt.

Symmetrie und Kongruenz.

1. Kapitel.

Der Kreis. Der geometrische Ort.

§ 1. Entstehung.

1. Wenn sich die Strecke CA um den einen Endpunkt C dreht, bis sie wieder in ihre ursprüngliche Lage zurückkehrt, so beschreibt der andere Endpunkt den Kreis, und die Strecke selbst erzeugt die Kreisfläche. Der Punkt C wird der Mittelpunkt, das Zentrum, die Strecke AC der Halbmesser, Radius, genannt. Man sagt, der Kreis wird aus dem oder um den gegebenen Mittelpunkt mit dem gegebenen Halbmesser beschrieben. Alle Radien eines Kreises sind einander gleich.

2. Jede Strecke, welche zwei Punkte des Umfangs verbindet, heisst Sehne; sie zerlegt denselben in zwei Bögen. Geht die Sehne durch den Mittelpunkt, so wird sie Durchmesser genannt. Jeder Durchmesser teilt den Umfang in zwei Halbkreise. Alle Durchmesser eines Kreises sind einander gleich. (Warum?) Wenn eine Gerade den Kreis schneidet, so geschieht

dies stets in zwei Punkten; die Gerade heisst Sekante. Geht die Sekante durch das Zentrum, so wird sie zur Zentrale. — Von zwei Bögen eines und desselben Kreises kann man den einen durch Drehung um das Zentrum zur Deckung mit dem anderen bringen. (Mechanisch mit Hilfe eines Stückchens Pauspapiers.)

3. Forderungssatz: Einen Kreis zu konstruieren, wenn der Mittelpunkt und der Radius gegeben sind; — wird mit Hilfe des Zirkels ausgeführt.

4. Ein Punkt liegt entweder auf dem Kreise oder ausserhalb oder innerhalb des Kreises, je nachdem sein Abstand vom Zentrum ebensogross oder grösser oder kleiner als der Halbmesser ist.

5. Kreise von gleichen Radien heissen gleich, mit verschieden langen Radien ungleich. Wenn ein Kreis einen andern schneidet, so erfolgt dies stets in zwei Punkten. Kreise mit demselben Mittelpunkt liegen konzentrisch, mit verschiedenem Mittelpunkt exzentrisch.

6. Man denkt sich den Umfang eines Kreises in 360 gleiche Bögen zerlegt und nennt jeden solchen Teil einen Bogengrad, kurz Grad. Ein Grad (°) hat 60 gleiche Minuten (′) und eine Minute 60 gleiche Sekunden (″). — Partes minutae primae, partes minutae secundae. — Ein Bogen von 90° heisst ein Quadrant, ein solcher von 60° ein Sextant u. s. w. — Die Teilung des Umfanges in 360 gleiche Teile lässt sich mit Lineal und Zirkel nicht ausführen.

7. Aufgabe: Einen Punkt zu finden, der von einem gegebenen Punkte A die vorgeschriebene Entfernung e hat. — Lösung: Es giebt unzählig viele Punkte, welche der Aufgabe genügen; alle liegen auf dem Kreise, der um A mit e beschrieben wird.

8. Der geometrische Ort. Wenn die Lage eines Punktes vermöge der Bedingungen, die er erfüllen soll,

nicht hinreichend bestimmt ist, so ist sie doch oft auf eine Linie beschränkt, auf welcher der Punkt liegen muss. Diese Linie heisst der geometrische Ort des Punktes.

9. Der geometrische Ort des Punktes, der von einem gegebenen Punkt eine gegebene Entfernung hat, ist der Kreis aus dem gegebenen Punkt mit der gegebenen Entfernung als Radius.

§ 2. Uebungen.

1. Auf der gegebenen Geraden L von dem auf ihr liegenden Punkte A aus eine Strecke gleich s abzutragen.

2. Die gegebene Strecke AB zu verdoppeln, zu verdreifachen.

3. Auf der Geraden L den Punkt X zu finden, der von dem gegebenen Punkte A die Entfernung e hat.

4. Die Punkte zu finden, welche von A die Entfernung a und zugleich von B die Entfernung b haben.

5. Die Punkte zu finden, welche von A und B die gleiche vorgeschriebene Entfernung a haben.

6. Die Punkte zu finden, welche von A und B die Entfernung AB haben.

7. In den gegebenen Kreis O eine Sehne von der Länge a einzutragen.

8. Lege in den Kreis O hintereinander Sehnen gleich dem Radius! Wie viele solcher Sehnen erhält man?

9. Mit einem gegebenen Radius einen Kreis zu beschreiben, der durch zwei gegebene Punkte geht.

10. Mit einem gegebenen Radius einen Kreis zu zeichnen, dessen Zentrum auf einer gegebenen Geraden liegt und der durch einen gegebenen Punkt geht.

11. Halbiere die Strecke AB durch Versuche mit dem Zirkel.

2. Kapitel.

Der Winkel.

§ 3. Entstehung und Bezeichnung.

1. Zwei Strahlen, die von demselben Punkte ausgehen, bilden einen Winkel ($\sphericalangle$). Er ist das Mass der Drehung, durch welche der eine Strahl in die Lage des andern gebracht wird. Die beiden Strahlen werden die Schenkel, der Punkt Spitze, Scheitel genannt.

Bemerkung. Streng genommen bilden die beiden Strahlen zwei Winkel. Fig. 1.

2. Bezeichnet wird der Winkel a) durch drei grosse lateinische Buchstaben, von denen derjenige, welcher an mittlerer Stelle genannt wird, am Scheitel, die beiden anderen an beliebigen Punkten der Schenkel stehen, z. B. Fig. 1 $\sphericalangle$ ABC oder $\sphericalangle$ CBA; b) wenn kein Missverständnis obwalten kann, durch den Scheitelbuchstaben allein, z. B. $\sphericalangle$ B; c) durch einen kleinen griechischen Buchstaben, der zwischen die Schenkel gezetzt wird, z. B. $\sphericalangle\ \alpha$.

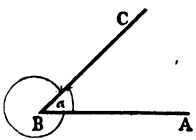


Fig. 1.

3. Die Grösse des Winkels ist von der Länge seiner Schenkel unabhängig.

4. Bemerkung. Die Bezeichnung der Punkte mit grossen, der Strecken mit kleinen lateinischen und der Winkel mit kleinen griechischen Buchstaben rührt von Euler (geb. 1707 in Basel, gest. 1783 in Petersburg) her.

§ 4. Einteilung der Winkel.

1. Wenn man sich in Fig. 1 den Strahl BA um B so weit gedreht vorstellt, bis er mit seinem Gegenstrahl zusammenfällt, so heisst der erzeugte Winkel ein ge-

streckter oder flacher. Führt der Schenkel BA eine volle Drehung aus, so nennt man den entstandenen Winkel einen vollen. Alle flachen Winkel sind einander gleich, ebenso die vollen. Der hohle (konkave) Winkel ist kleiner, der erhabene (konvexe) grösser als der flache.

2. Die Hälfte des gestreckten Winkels heisst ein rechter Winkel (R). Die Schenkel eines rechten Winkels stehen senkrecht (⌊) aufeinander; der eine ist das Lot, die Senkrechte des andern; der Scheitel wird Fusspunkt genannt. — Alle rechten Winkel sind einander gleich (warum?). — Der spitze Winkel ist kleiner, der stumpfe grösser als ein rechter; beide Arten heissen schiefe Winkel.

3. Folgerungen. In einem Punkt einer Geraden giebt es auf dieser nur ein Lot. Ein gestreckter Winkel ist gleich 2 R, ein voller gleich 4 R.

4. Bemerkung. Das Ziehen von Senkrechten erfolgt auf mechanischem Wege mit Hilfe desjenigen Instruments, das man „Winkel" zu nennen pflegt.

§ 5. Winkelvergleichung.

1. Denkt man sich einen Winkel auf einen anderen gelegt, und es decken sich hierbei die Schenkel paarweise, so sind die Winkel gleich.

2. Zieht man durch den Scheitel eines Winkels eine Gerade, die in die Winkelfläche fällt, so wird der Winkel in zwei Teile zerlegt. Die Gerade, welche einen Winkel in zwei gleiche Teile zerlegt, ihn halbiert, heisst Mediane, Winkelhalbierende.

3. Wird ein Winkel so auf einen zweiten gelegt, dass die Scheitel und ein Paar der Schenkel zusammenfallen, und es deckt dabei der erste Winkel nur einen Teil des zweiten, so ist der erste kleiner als der zweite und dieser grösser als jener.

§ 6. Winkel und Kreis.

1. Zieht man, Fig. 2, in dem Kreise C die Strahlen CA und CB, so wird der von ihnen gebildete Winkel ACB ein Zentriwinkel und der Bogen AB der zum Winkel gehörige Bogen genannt. Ist ferner in demselben Kreise Bogen DE gleich Bogen AB und zieht man die Strahlen CD und CE, so ist $\sphericalangle DCE = ACB$, weil sie durch eine Drehung um C zur Deckung gebracht werden können. Dabei fallen auch die Sehnen DE und AB zusammen. Hieraus folgt:

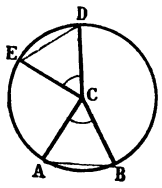


Fig. 2.

In demselben Kreise gehören zu gleichen Bögen gleiche Sehnen und gleiche Zentriwinkel. Der Satz ist auch richtig, wenn die Bögen gleichen Kreisen angehören.

2. Die natürlichste Masseinheit der Winkel ist der volle Winkel. Derselbe wird in 360 gleiche Winkel zerlegt gedacht, wovon jeder ein Winkelgrad, kurz Grad (°) heisst. Der Grad zerfällt in 60 gleiche Minutenwinkel, Minuten (′), und eine Minute in 60 gleiche Sekundenwinkel, Sekunden (″).

3. Folgerung. Jeder Winkel hat soviele Grade, Minuten, Sekunden als sein zugehöriger Bogen.

4. Der Transporteur dient zum Messen gezeichneter und zum Zeichnen gemessener Winkel.

§ 7. Operationen mit Winkeln.

1. Aufgabe. Einen Winkel zu übertragen; d. h. an die gegebene Gerade AB in dem gegebenen Punkte A einen Winkel gleich dem gegebenen Winkel CDE anzutragen.

Konstruktion. Um D und A beschreibe mit gleichen Radien Kreise. Der erstere schneidet die Schenkel in C und E, der andere die Gerade in B. Lege hierauf in den Kreis A die Sehne BF = CE und ziehe AF. Es ist ∢ FAB der gesuchte. — Der angetragene Winkel kann vier verschiedene Lagen einnehmen.

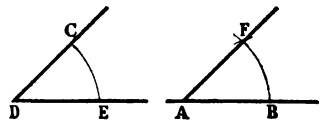


Fig. 3.

2. Die Summe zweier Winkel wird erhalten, wenn man den einen an den andern anträgt, so dass sie den Scheitel und einen Schenkel gemeinschaftlich haben. Durch wiederholtes Anlegen lässt sich ein Winkel vervielfachen.

3. Ein kleinerer Winkel lässt sich von einem grösseren durch Aufeinanderlegen abziehen. Dabei müssen die Winkel den Scheitel und einen Schenkel gemeinsam haben.

4. Um einen Winkel in eine Anzahl gleicher Teile zu zerlegen, wird der zugehörige Bogen in die vorgeschriebene Anzahl gleicher Teile zerlegt. Hierauf verbindet man die Teilpunkte mit dem Scheitel.

5. Bemerkung. Die Halbierung eines Winkels wird später gezeigt. Die Trisektion eines beliebigen Winkels ist mit Zirkel und Lineal nicht ausführbar.

§ 8. Nebenwinkel, Scheitelwinkel.

Zwei einander schneidende Linien bilden vier Winkel, die paarweise mit dem Namen Neben- bezw. Scheitelwinkel belegt worden sind.

1. Nebenwinkel sind zwei hohle Winkel, welche den Scheitel und einen Schenkel gemeinsam haben,

während die beiden andern Schenkel eine Gerade bilden. Z. B. Fig. 4 $\sphericalangle \alpha$ und β, β und γ, γ und δ, δ und α.

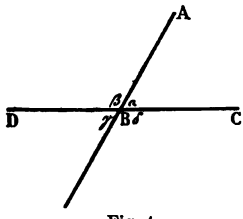


Fig. 4.

2. Aus der Definition ergiebt sich:

Die Summe zweier Nebenwinkel ist ein flacher Winkel oder gleich 2 R.

3. Folgerung. Nebenwinkel sind im allgemeinen ungleich gross; der eine ist spitz, der andere stumpf. Im besonderen Falle können Nebenwinkel gleich sein, dann ist jeder ein rechter.

4. Kehrsatz. Haben zwei Winkel den Scheitel und einen Schenkel gemeinsam und beträgt ihre Summe 2 R, so bilden die nicht gemeinschaftlichen Schenkel eine Gerade. Beweis!

5. Zu gleichen Winkeln gehören gleiche Nebenwinkel.

6. Scheitelwinkel sind zwei hohle Winkel von solcher Lage, dass die Schenkel des einen die Gegenstrahlen der Schenkel des anderen sind. Z. B. Fig. 4 $\sphericalangle \alpha$ und γ, β und δ.

7. Durch Anwendung des Satzes 2 dieses Paragraphen erhält man $\sphericalangle \alpha + \beta = 2$ R und ebenso $\sphericalangle \beta + \gamma = 2$ R. Hieraus folgt $\sphericalangle \alpha + \beta = \beta + \gamma$ und damit auch $\sphericalangle \alpha = \gamma$, d. h. Scheitelwinkel sind einander gleich.

8. Kehre den Lehrsatz von den Scheitelwinkeln um und beweise die Umkehrung!

9. Zwei gleiche Winkel haben auch gleiche Scheitelwinkel.

§ 9. Ergänzungswinkel.

1. Zwei Winkel, deren Summe 1 R ausmacht, heissen komplementär, und jeder von ihnen ist das Komplement des andern. Zwei Winkel, deren Summe 2 R

beträgt, heissen supplementär, und jeder von ihnen ist das Supplement des andern.

2. Zusatz. Nebenwinkel sind supplementär.

§ 10. Uebungen.

1. Wie gross ist der Winkel auf der Windrose zwischen den Richtungen N. und ONO.?

2. Wie gross sind die beiden Winkel, welche die Zeiger einer Uhr um 3 Uhr oder um 5 Uhr bilden?

3. Berechne den Winkel, den der Stundenzeiger in $1^h\ 30'$, der Minutenzeiger in $45'$ zurücklegt.

4. Unter welchem Winkel erscheint uns der Durchmesser der Mond- bezw. der Sonnenscheibe?

5. Der Wegerich zeigt $^3/_8$ Blattstellung, die Eiche $^2/_5$. Wie gross ist der Winkel von einem Blatt bis zum nächsten?

6. α, β, γ sind drei Winkel und es ist $\alpha > \beta > \gamma$. Man bilde $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$, $\alpha+\gamma-\beta$, 2α.

7. Konstruiere die Nebenwinkel, den Scheitelwinkel zu einem gegebenen Winkel!

8. Finde den Supplementwinkel zu einem gegebenen Winkel!

9. Von zwei Nebenwinkeln ist der eine das Doppelte des andern; wie gross ist jeder?

10. Es ist $\sphericalangle \alpha = 47^\circ\ 16'\ 33''$. Wie gross ist sein Komplement-, Neben-, Supplementwinkel?

11. Alle Winkel einerseits einer Geraden mit demselben Scheitel geben 2 R zur Summe.

12. Alle Winkel um einen Punkt betragen 4 R zusammen.

13. Die Halbierungslinien zweier Nebenwinkel stehen senkrecht aufeinander.

14. Die Lote, welche man im Scheitel eines Winkels auf dessen Schenkeln errichtet, schliessen einen Winkel gleich dem gegebenen oder das Supplement desselben ein.

15. Die Gerade, welche einen Winkel halbiert, halbiert auch den Scheitelwinkel.

16. Schneiden sich drei Geraden in einem Punkt, so ist die Summe dreier nicht aneinandergrenzender Winkel 2 R.

---

3. Kapitel.

Von den Figuren im allgemeinen.

§ 11. Bezeichnung.

1. Ein vollständig begrenzter Teil der Ebene heisst Figur; der Linienzug, welcher die Grenze darstellt, wird ihr Umfang genannt. Je nach dem Umfange werden geradlinig, krummlinig, gemischtlinig begrenzte Figuren unterschieden.

2. Die Strecken, welche eine geradlinige Figur begrenzen, heissen Seiten. Je zwei aufeinanderfolgende Seiten schliessen einen Winkel (Innenwinkel) ein. Die Scheitel der Winkel sind die Ecken der Figur. Ist der Winkel an einer Ecke hohl oder erhaben, so wird sie aus- bezw. einspringend genannt. Im folgenden sind, falls nicht das Gegenteil betont wird, nur Figuren mit lauter ausspringenden Ecken vorausgesetzt. Eine Strecke, die zwei nicht aufeinanderfolgende Ecken verbindet, heisst Diagonale. Die Verlängerung einer Seite bildet mit der nächsten Seite einen Aussenwinkel. Strecken und Winkel einer Figur werden die Stücke derselben genannt.

3. Bezeichnet wird eine geradlinige Figur durch grosse lateinische an ihre Ecken gesetzte Buchstaben.

4. Jede geradlinige Figur hat ebensoviele Seiten wie Ecken. Zu ihrer Begrenzung sind mindestens drei Seiten nötig.

5. Man teilt die geradlinigen Figuren nach der Zahl ihrer Ecken oder Seiten ein und nennt sie Dreiecke, Vierecke u. s. f., Vielecke (Polygone).

6. Im Dreieck (△) liegt jeder Ecke, jedem Winkel eine Seite gegenüber (Gegenseite), während die beiden anderen Seiten den Winkel einschliessen. Jeder Seite liegt eine Ecke, ein Winkel gegenüber (Gegenecke, Gegenwinkel), während die beiden anderen Winkel ihr anliegen. Die Bezeichnung der Stücke eines Dreiecks erfolgt in der durch Fig. 5 angegebenen Weise.

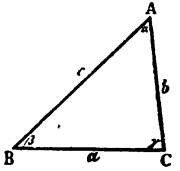


Fig. 5.

7. Jedes Viereck hat zwei Diagonalen.

8. Bemerkung. Unter einer Figur im weiteren Sinne versteht man eine Vereinigung von Punkten und Linien.

§ 12. Uebungen.

1. Wieviele Aussenwinkel hat ein Dreieck?

2. Warum sind die beiden Aussenwinkel, die an einer Ecke liegen, einander gleich?

3. Zeichne ein Viereck mit einer einspringenden, ein Fünfeck mit zwei einspringenden Ecken.

4. Wieviele Diagonalen giebt es im Fünfeck, im Achteck von einer Ecke aus? Wieviele im ganzen?

5. In wieviele Dreiecke zerfällt ein Neuneck durch die von einer Ecke aus gezogenen Diagonalen?

6. Im n-Eck lassen sich von einer Ecke aus $(n-3)$ und im ganzen $\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-3)$ Diagonalen ziehen.

7. Jedes n-Eck zerfällt durch die von einer Ecke aus gezogenen Diagonalen in $(n-2)$ Dreicke.

4. Kapitel.

Zentrische Symmetrie.

§ 13. Erklärungen.

1. Der Begriff Figur wird in folgender Erörterung im weiteren Sinne genommen.

2. Drehung in der Ebene ist eine Bewegung um einen festen Punkt. Unter Umdrehung versteht man eine Drehung um einen flachen Winkel.

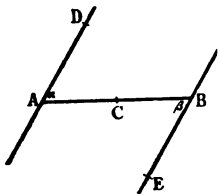


Fig. 6.

3. Fig. 6. Macht die Strecke AB um ihren Mittelpunkt C eine Umdrehung, so fällt A auf B und B auf A. Bilden ferner AD und BE mit AB gleiche Winkel, $\sphericalangle \alpha = \beta$, in der Lage, wie die Figur zeigt, so deckt nach der Umdrehung AD die Linie BE und BE die Linie AD; und wenn AD = BE ist, so gelangen D und E ebenfalls zur gegenseitigen Deckung.

4. Eine Figur, die nach einer Umdrehung um einen festen Punkt ihre frühere Lage deckt, heisst zentrisch symmetrisch für den Punkt als Mittelpunkt. Zwei Stücke, welche dabei ihre Lage vertauschen, heissen entsprechend, homolog.

5. Entsprechende Stücke sind einander gleich.

6. Der Kreis ist eine zentrisch symmetrische Figur.

§ 14. Winkelpaare an drei Geraden.

Werden — Fig. 7 — zwei gerade Linien AB und CD von einer dritten EF geschnitten, so entstehen 8 Winkel: 4 äussere α, β, η, ϑ und 4 innere γ, δ, ε, ζ. Dieselben werden z. T. paarweise mit Namen belegt.

a) Gegenwinkel: ein äusserer und ein innerer auf derselben Seite der Schneidenden, z. B. α und ε, γ und ϑ.

b) Konjugierte Winkel: zwei äussere oder zwei innere auf derselben Seite der Schneidenden, z. B. α und ϑ, γ und ε.

c) Wechselwinkel: zwei äussere oder zwei innere auf verschiedenen Seiten der Schneidenden, z. B. α und η, δ und ε.

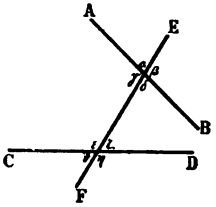


Fig. 7.

§ 15. Parallele Geraden.

1. Zwei Linien, die sich in ihrer ganzen Erstreckung nicht schneiden, heissen parallel ($\parallel$).

2. Grundsatz. Durch einen Punkt ausserhalb einer Geraden lässt sich zu dieser nur eine Parallele ziehen.

3. Aus diesem Grundsatz ergiebt sich durch ein indirektes Beweisverfahren: a) Zwei Geraden, die einer dritten parallel sind, liegen auch unter sich parallel. b) Schneidet eine Gerade die eine von zwei Parallelen, so trifft sie auch die andere.

§ 16. Hauptsätze von den Parallelen.

1. Werden — Fig. 8 — die beiden Linien DF und GE von HJ so geschnitten, dass die Wechselwinkel α und β gleich sind, so ist die ganze Figur für C, den Mittelpunkt der AB, zentrisch symmetrisch. Würden sich nun die Linien FD und EG in einem Punkte schneiden, so müsste ein zweiter Schnittpunkt auch auf der anderen Seite vorhanden sein, denn die Figur deckt nach einer Umdrehung ihre ursprüngliche Lage, und die Gerade HJ trennt die Ebene vollständig in zwei

Teile. Die beiden Geraden hätten demnach 2 Schnittpunkte gemeinsam, was nicht möglich ist. Mithin sind gemeinschaftliche Punkte überhaupt ausgeschlossen und die Geraden gehen parallel. Der soeben gewonnene Satz lautet:

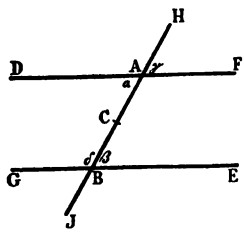


Fig. 8.

Werden zwei Geraden von einer dritten unter gleichen Wechselwinkeln geschnitten, so gehen die beiden Linien parallel.

2. Ist die nebenstehende Figur in der Weise entworfen, dass zwei Gegenwinkel, etwa β und γ gleich gross sind, so ist auch $\sphericalangle \alpha = \beta$; denn $\sphericalangle \alpha = \gamma$ als Scheitelwinkel und $\sphericalangle \beta = \gamma$ nach der Voraussetzung. Wenn aber $\sphericalangle \alpha = \beta$ ist, so geht nach No. 1 dieses Paragraphen DF ∥ GE, d. h.:

Werden zwei Geraden von einer dritten unter gleichen Gegenwinkeln geschnitten, so gehen die beiden Linien parallel.

3. Ferner sei vorausgesetzt, dass die konjugierten Winkel zur Summe 2 R haben. Z. B. in obiger Figur sei $\sphericalangle \alpha + \delta = 2$ R. Dazu kommt $\sphericalangle \delta + \beta = 2$ R als Nebenwinkel. Mithin ist $\sphericalangle \alpha = \beta$. Demnach:

Werden zwei Geraden von einer dritten unter supplementären konjugierten Winkeln geschnitten, so gehen die beiden Linien parallel.

§ 17. Kehrsätze von den Parallelen.

Bei der folgenden Betrachtung seien zwei parallele gerade Linien angenommen, die von einer Geraden geschnitten werden. Es lässt sich dann zeigen, dass die

Umkehrungen der drei Sätze des vorigen Paragraphen richtig sind.

1. Fig. 9. Gesetzt die Wechselwinkel α und β seien nicht gleich. Alsdann lässt sich durch B die Gerade BE so legen, dass $\sphericalangle \gamma = \alpha$ wird. Nach § 16, 1 muss nun BE ∥ CA sein. Nach der Voraussetzung ist jedoch auch BD ∥ CA. Man hätte daher zwei Parallelen durch B zu CA, was nicht möglich ist. Der erhaltene Widerspruch kann nur durch die Annahme, dass $\sphericalangle \alpha = \beta$ ist, gelöst werden. Analog lässt sich zeigen, dass auch jedes andere Paar von Wechselwinkeln gleich sein muss; also ist folgender Satz richtig:

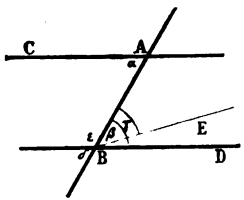


Fig. 9.

Werden zwei Parallelen von einer Geraden geschnitten, so sind je zwei Wechselwinkel einander gleich.

2. Es müssen aber auch die Gegenwinkel gleich gross sein. Da nämlich nach dem vorigen Beweis $\sphericalangle \alpha = \beta$ ist, und weil $\sphericalangle \delta = \beta$ ist als Scheitelwinkel, so folgt $\sphericalangle \alpha = \delta$. In Worten:

Werden zwei Parallelen von einer Geraden geschnitten, so sind je zwei Gegenwinkel einander gleich.

3. Schliesslich müssen je zwei konjugierte Winkel zur Summe 2 R haben. Denn es ist $\sphericalangle \varepsilon + \beta = 2$ R als Nebenwinkel, ferner ist nach No. 1 dieses Paragraphen $\sphericalangle \alpha = \beta$; folglich $\sphericalangle \varepsilon + \alpha = 2$ R. Hieraus ergiebt sich der dritte Kehrsatz:

Werden zwei Parallelen von einer Geraden geschnitten, so sind je zwei konjugierte Winkel supplementär.

§ 18. Der unendlich ferne Punkt.

1. Zusätze. a) Alle Lote auf einer Geraden sind parallel. b) Das Lot auf einer von zwei Parallelen ist auch auf der anderen senkrecht. c) Von einem Punkt lässt sich auf eine Gerade nur ein Lot fällen.

2. In § 15, 1 wurden parallele Geraden als solche definiert, die sich nicht schneiden. Dieser Ausdruck lässt sich durch einen andern ersetzen. In Fig. 10 werde durch den Punkt A die Gerade AF gelegt, welche die gegebene L in B schneidet. Dreht man nun AF in bestimmtem Sinne um A, so rückt B auf L fort, immer in weitere Ferne. Der Punkt B verschwindet, sowie AF ∥ L wird, d. h. wenn AF mit der durch A zu L gezogenen Parallele AE zusammenfällt. Da es ferner nach dem Parallelaxiom durch A zu L nur eine Parallele giebt, so muss, bei fortgesetzter Drehung der AF über die Parallellage hinaus, sofort wieder ein Schneiden mit L stattfinden; und nach einer vollen Drehung der AF ist B zu seinem Ausgangsort zurückgekehrt. Die Gerade AF schneidet die L sonach immer, nur dann nicht, wenn sie ihr parallel ist.

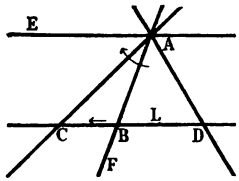


Fig. 10.

Für manche Untersuchungen und Darstellungen ist es vorteilhaft, das Parallelgehen zweier Geraden nicht als Ausnahmefall aufzuführen, sondern als besonderen Fall des Schneidens zu behandeln, indem man sich so ausdrückt: Zwei parallele Geraden schneiden sich im Unendlichen. Da zwei Geraden sich immer nur in einem Punkte treffen, so nimmt man auch für den Grenzfall der Parallellage konsequenterweise an, dass zwei Parallelen nur einen unendlich fernen Punkt haben.

3. Aufgabe. Fig. 11. Durch den gegebenen Punkt A zu der gegebenen Geraden EC die Parallele zu ziehen.

Lösung. Ziehe durch A eine die EC in B schneidende Gerade und mache $\sphericalangle DAB = ABC$, so ist DA ∥ EC.

Bemerkung. Zur mechanischen Konstruktion paralleler Geraden dienen das Lineal und der Winkel.

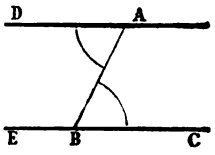


Fig. 11.

§ 19. Geschichtliche Bemerkungen.

Euklid gab in seinen Elementen dem Parallelaxiom folgenden Wortlaut: „Zwei gerade Linien, die von einer dritten geschnitten werden, so dass die Summe zweier innern konjugierten Winkel kleiner als 2 R ist, treffen hinreichend verlängert auf eben der Seite zusammen.“ Dies ist das berühmt gewordene 11. Axiom unter den von ihm aufgezählten Grundsätzen. Neuere Untersuchungen, insbesondere die von Fr. Klein, haben endgültig dargethan, dass der obige Satz nicht bewiesen werden kann. — Der Ausdruck „unendlich ferner Punkt“ wurde zuerst von Desargues 1630 und später 1687 von Newton gebraucht. Steiner sagt: „Parallele Geraden sind nach dem unendlich fernen Punkte gerichtet“.

§ 20. Die Winkel im Dreieck.

1. Es soll untersucht werden, wie gross die Summe der Winkel eines Dreiecks ist. Um diesen Zweck zu erreichen, legt man — Figur 12 — durch die Spitze A zu BC die Parallele AF. Hierauf findet sich $\sphericalangle \beta + \alpha + \delta = 2$ R nach § 17, 3; aber $\sphericalangle \delta = \gamma$ als Wechselwinkel an Parallelen. Daher ist $\sphericalangle \alpha + \beta + \gamma = 2$ R; d. h.:

In jedem Dreieck ist die Summe der Winkel gleich 2 R.

2. Folgerungen. a) Die Summe zweier Dreieckswinkel ist kleiner als 2 R. b) Von den Winkeln eines Dreiecks sind einer stumpf und die beiden anderen spitz; oder einer ein rechter und die beiden anderen spitz; oder alle drei spitz.

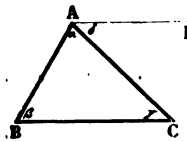


Fig. 12.

3. Drehe die Gerade AC um A, verfolge dabei die Grösse der Winkel α, δ, γ und ermittle die Bedeutung der Hilfslinie AF.

§ 21. Aussenwinkel eines Dreiecks.

1. Ein Aussenwinkel eines Dreiecks steht in einfacher Beziehung zu gewissen Dreieckswinkeln. Man hat nämlich — Figur 13 — $\sphericalangle \gamma + \delta = 2\,\text{R}$, sodann nach dem Satz des vorigen Paragraphen $\sphericalangle \alpha + \beta + \gamma = 2\,\text{R}$. Daher $\sphericalangle \delta = \alpha + \beta$. In Worten:

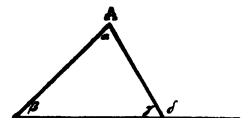


Fig. 13.

Jeder Aussenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden von ihm getrennt liegenden Dreieckswinkel.

2. Zusatz. Ein Aussenwinkel ist grösser als jeder der beiden von ihm getrennt liegenden Dreieckswinkel.

§ 22. Einteilung der Dreiecke.

Die Dreiecke werden eingeteilt:

1. Hinsichtlich der Winkel in rechtwinklige und schiefwinklige, und letztere wieder in stumpf- und spitzwinklige. Im rechtwinkligen Dreieck heissen

die beiden Seiten, welche den rechten Winkel einschliessen, Katheten, und die Seite, welche ihm gegenüber liegt, Hypotenuse.

2. Hinsichtlich der Seiten in gleichseitige mit drei gleichen Seiten, gleichschenklige mit zwei gleichen Seiten und ungleichseitige, worin alle drei Seiten unter sich ungleich sind. Die beiden gleichen Seiten eines gleichschenkligen Dreiecks werden Schenkel, die dritte Seite Basis, Grundseite genannt. Zwei seiner Winkel liegen an der Basis, der dritte an der Spitze.

Zusatz. Ein rechtwinkliges Dreieck kann auch gleichschenklig sein.

§ 23. Die Winkel eines Vielecks.

Zieht man in einem Viereck eine Diagonale, welche das Viereck in zwei Dreiecke zerlegt, so ergiebt sich, dass die Winkel des Vierecks 4 R zusammen betragen. Um zu erfahren, welche Summe die Winkel eines n-Ecks liefern, zieht man von einer Ecke aus die sämtlichen Diagonalen. Durch dieselben wird das Vieleck in (n—2) Dreiecke zerlegt. Die Summe der Winkel dieser Dreiecke stimmt mit derjenigen des Polygones überein. Daher:

Die Summe der Winkel eines jeden n-Ecks beträgt $2.(n-2)\,R = (2n-4)\,R$.

§ 24. Uebungen.

1. Werden zwei parallele Linien von einer Geraden geschnitten, so entstehen 8 Winkel; einer derselben ist $56^0\ 17'\ 18''$. Wie gross sind die anderen und warum?

2. Wie gross sind die Winkel eines Dreiecks, wenn sie sich wie 1:2:3 verhalten?

3. Gehen die Schenkel zweier Winkel paarweise gleichgerichtet parallel, so sind die Winkel gleich. Ist

jedoch ein Paar entgegengesetzt parallel, so sind die Winkel supplementär.

4. Zwei Punkte A und B sind zentrisch symmetrisch für den Mittelpunkt ihrer Verbindungsstrecke.

5. Zwei parallele Geraden sind zentrisch symmetrisch für den Mittelpunkt einer zwischen sie gelegten und von ihnen begrenzten Strecke.

6. Sind A und B zentrisch symmetrisch in bezug auf C, so ist C die Mitte von AB.

7. Sind zwei Geraden zentrisch symmetrisch für einen Punkt, so sind die Geraden parallel, und der Punkt ist die Mitte jeder durch ihn und zwischen sie gelegten und von ihnen begrenzten Strecke.

8. Liegen A und B, ebenso C und D zentrisch symmetrisch, so sind AC und BD gleich gross.

9. Sind die Geraden L und L', ebenso G und G' zentrisch symmetrisch, so entspricht der Schnittpunkt (L, G) dem von (L', G'), und es ist $\sphericalangle$ (L, G) = (L', G').

10. Sind in Fig. 6 die Punkte A und B zentrisch symmetrisch, ist ferner $\sphericalangle \alpha = \beta$ und AD = BE, so liegen auch D und E zentrisch symmetrisch.

11. Mit Hilfe des vorigen Satzes eine gegebene Strecke zu halbieren.

12. Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, welche eine gegebene Strecke halbiert.

13. In jedem Dreieck ist $\sphericalangle \alpha = 2\,\mathrm{R} - (\beta + \gamma)$.

14. Sind in einem rechtwinkligen Dreieck β und γ die spitzen Winkel, so ist $\sphericalangle \beta + \gamma = 1\,\mathrm{R}$ oder $\sphericalangle \beta = 1\,\mathrm{R} - \gamma$.

15. Wenn zwei Dreiecke in zwei Winkeln übereinstimmen, so sind auch die dritten Winkel einander gleich.

16. Die drei Aussenwinkel eines Dreiecks geben 4 R zur Summe.

17. Wie gross ist die Summe der Aussenwinkel eines n-Ecks?

18. Stehen die Schenkel eines Winkels senkrecht auf denen eines zweiten, so sind die Winkel einander gleich oder supplementär.

19. Das Lot von der Spitze auf die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks teilt dieses in zwei Dreiecke. Es ist zu zeigen, dass die drei Dreiecke einzeln verglichen gleiche Winkel haben.

20. Suche den Zusammenhang zwischen den Sätzen der Paragraphen 17 und 20 auf.

---

5. Kapitel.

Axiale Symmetrie.

§ 25. Einführung.

1. Die Bewegung einer ebenen Figur um eine Axe, die in ihrer Ebene liegt, um einen flachen Winkel (im Raume) heisst Umwendung, Umklappung.

2. Wenn man — Fig. 14 — die Strecke AB um das in ihrer Mitte auf ihr errichtete Lot (Mittellot, Mittelsenkrechte) umwendet, so fällt jeder der beiden Endpunkte in die Anfangslage des andern. Legt man durch A und B parallele Geraden zu dem Mittellot CD, so werden auch diese nach der Umklappung ihre Lagen vertauscht haben.

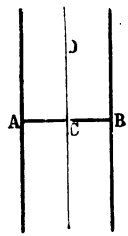


Fig. 14.

3. Macht der Winkel BAC — Fig. 15 — um seine Halbierungslinie AE eine Umklappung, so deckt jeder Schenkel die ursprüngliche Lage des andern; wenn ferner die Strecken AB und AC gleich sind, so vertauschen auch B und C ihre Lagen.

4. Eine Figur (im weiteren Sinne des Wortes), welche nach einer Umwendung ihre Anfangslage deckt, heisst

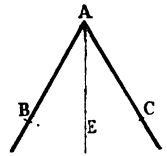


Fig. 15.

symmetrisch in Bezug auf die Drehaxe. Zwei Stücke, die bei der Umklappung ihre Lagen vertauschen, heissen homolog, entsprechend.

5. Homologe Stücke sind einander gleich.

6a. Zwei Punkte sind axial symmetrisch in Bezug auf das Mittellot der sie verbindenden Strecke.

7a. Zwei Linien sind axial symmetrisch hinsichtlich der Halbierungslinie eines von ihnen gebildeten Winkels.

6b. Wenn zwei Punkte bezüglich einer Axe symmetrisch liegen, so ist die Axe das Mittellot der sie verbindenden Strecke. (Beweis!)

7b. Wenn zwei Linien hinsichtlich einer Axe symmetrisch sind, so ist die Axe die Mediane desjenigen von ihnen gebildeten Winkels, in dem die Axe liegt. (Beweis!)

8. Ein Kreis ist axial symmetrisch bezüglich irgend eines Durchmessers.

§ 26. Beziehungen zwischen den Gegenstücken eines Dreiecks. Folgerungen.

1. Es sei — Fig. 16 — ABC ein Dreieck, in dem $AC > AB$ ist. Denkt man sich den $\sphericalangle A$ durch AE halbiert und $\triangle$ ABE um AE umgeklappt, so fällt AB längs AC und, da $AC > AB$ ist, der Punkt B zwischen A und C nach F. Hierbei deckt $\sphericalangle$ ABE den $\sphericalangle$ AFE. Da nun $\sphericalangle$ ABE $=$ AFE und $\sphericalangle$ AFE $>$ ACE ist als Aussenwinkel des $\triangle$ EFC, so ist auch $\sphericalangle$ ABE $>$ ACE. Mithin:

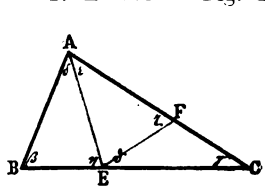


Fig. 16.

In jedem Dreieck liegt der grösseren von zwei Seiten der grössere Winkel gegenüber.

2. Es wäre jetzt zu untersuchen, ob die Umkehrung des soeben gefundenen Satzes richtig ist. Dem entsprechend ist $\sphericalangle \beta > \gamma$ vorausgesetzt. Wiederum sei AE die Mediane des $\sphericalangle$ BAC. Es ist nun $\sphericalangle \delta = \varepsilon$ und $\sphericalangle \beta > \gamma$; daher $\sphericalangle \delta + \beta > \varepsilon + \gamma$, folglich $\sphericalangle \eta < \vartheta$ (Supplemente). Wird jetzt $\triangle$ ABE um AE umgeklappt, so muss BE in den Winkel AEC fallen; weil aber dabei AB längs AC zu liegen kommt, so deckt B einen Punkt zwischen A und C, oder es ist $AB < AC$. In Worten:

In jedem Dreieck liegt dem grösseren von zwei Winkeln auch die grössere Seite gegenüber.

3. Zusätze. a) Im rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse grösser als jede der beiden Katheten. b) Dem stumpfen Winkel liegt im Dreieck die grösste Seite gegenüber.

4. Verlängert man in dem $\triangle$ ABC die Seite BA um AC bis E und zieht EC, so ist $\sphericalangle AEC = \sphericalangle ACE$; mithin $\sphericalangle BCE > \sphericalangle BEC$. Nach dem Lehrsatz No. 2 in diesem Paragraphen ist daher in dem $\triangle$ BCE die Seite $BE > BC$, d. h. $AB + AC > BC$. In Worten:

In jedem Dreieck ist die Summe zweier Seiten grösser als die dritte.

5. Da nach No. 4 dieses Paragraphen $b + c > a$ ist, so ergiebt sich durch Subtraktion $b > a - c$. In Worten:

In jedem Dreieck ist eine Seite grösser als die Differenz der beiden anderen.

§ 27. Das gleichschenklige und das gleichseitige Dreieck.

Aus den Sätzen 1 und 2 des vorigen Paragraphen ergiebt sich:

1. Im gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel einander gleich.

2. Sind in einem Dreieck zwei Winkel gleich, so ist es gleichschenklig.

3. Zusätze. a) Die Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks können nur spitz sein. b) Im gleichseitigen Dreieck sind alle Winkel einander gleich und jeder ist gleich 60^0. c) Ein gleichwinkliges Dreieck ist auch gleichseitig. d) Im gleichschenklig rechtwinkligen Dreieck ist jeder Winkel an der Basis gleich 45^0. e) Der Aussenwinkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks ist doppelt so gross als ein Basiswinkel.

4. Ist in Fig. 17 AD die Mediane des Winkels an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks ABC, so ist dasselbe, da $\sphericalangle \alpha' = \alpha''$ und $AB = AC$ ist, hinsichtlich AD symmetrisch. Hieraus folgt $BD = DC$ und $\sphericalangle \delta = \varepsilon$. Weil aber $\sphericalangle \delta + \varepsilon = 2\,R$ ist, so ergiebt sich $\sphericalangle \delta = \varepsilon = 1\,R$; d. h.:

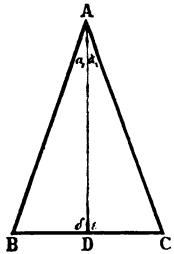


Fig. 17.

In jedem gleichschenkligen Dreieck halbiert die Mediane des Winkels an der Spitze die Grundseite und steht auf ihr senkrecht.

Somit fallen in eine Gerade zusammen: die Mediane des Winkels an der Spitze, die Höhe und die Transversale auf die Grundseite wie auch das Mittellot auf derselben. Mithin kommen einer jeden die Eigenschaften der andern zu. (§ 32, Nr. 14.)

§ 28. Entfernung eines Punktes von einer Geraden.

In diesem Paragraphen sollen die Längen der Strecken miteinander verglichen werden, die man von einem Punkte A nach einer Geraden L legen kann.

1. Ist AB ⊥ L — Fig. 18 — und AC irgend eine schiefe Strecke, so muss nach § 26, 3a) AB < AC sein. D. h.: Das Lot ist die kürzeste Strecke, die man von einem Punkt nach einer Geraden ziehen kann.

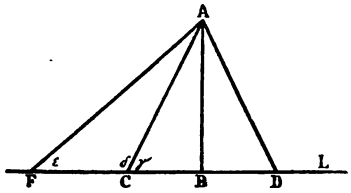


Fig. 18.

Bemerkung. Die Entfernung eines Punktes von einer Geraden wird durch das Lot gemessen.

2. Haben ferner die Endpunkte C und D zweier schiefen Strecken von dem Fusspunkte B des Lotes gleiche Entfernungen, so ist das △ CAD in Bezug auf die Axe AB symmetrisch, woraus die Gleichheit der Strecken AC und AD folgt. In Worten:

Zwei schiefe Strecken sind gleich, wenn ihre Endpunkte von dem Fusspunkte des Lotes gleich weit entfernt sind.

3. Schliesslich werde AF so gelegt, dass BF > BC ist. Da $\sphericalangle \gamma$ jedenfalls ein spitzer ist, so wird dessen Nebenwinkel δ stumpf sein. Folglich ist in dem △ AFC nach § 26, 3 AF > AC. D. h.:

Von zwei schiefen Strecken ist diejenige die grössere, deren Endpunkt vom Fusspunkt des Lotes weiter entfernt ist.

§ 29. Das Mittellot und die Winkelhalbierende als geometrische Oerter.

1. Ist in Fig. 19 GH das Mittellot auf AB, so ist sowohl EA = EB als auch JA = JB u. s. w., d. h. alle Punkte des Mittellots haben von A und B

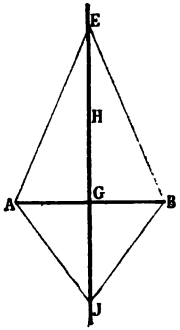


Fig. 19.

gleiche Entfernungen. Umgekehrt: Jeder von zwei Punkten gleichweit entfernte Punkt liegt auf dem Mittellot der Verbindungsstrecke beider Punkte; daher: Der geometrische Ort eines Punktes, der von zwei gegebenen Punkten gleiche Entfernungen hat, ist das Mittellot auf der Verbindungsstrecke der beiden Punkte.

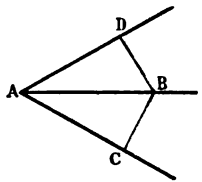


Fig. 20.

2. Fällt man — Fig. 20 — von einem beliebigen Punkte B der Winkelhalbierenden AB des $\sphericalangle DAC$ die Lote auf die Schenkel, so ergiebt sich ein Viereck, das hinsichtlich der Axe AB symmetrisch ist. Folglich ist $BC = BD$, oder irgend ein Punkt der Mediane hat von den Schenkeln des Winkels gleiche Entfernungen. Die Umkehrung dieses Satzes ist auch richtig. Demnach:

Der geometrische Ort eines Punktes, der von den Schenkeln eines Winkels gleiche Entfernungen hat, ist die Mediane desselben.

§ 30. Zwei merkwürdige Punkte im Dreieck.

1. Die Mittellote — Fig. 21 — auf den Seiten AB und BC eines Dreiecks schneiden sich in O. Da nun $OA = OB$ und $OB = OC$ ist, so folgt auch $OA = OC$. Daher liegt nach § 29, 1 der Punkt O auf der Mittelsenkrechten der Seite AC. In Worten:

Die drei Mittellote der Seiten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte, der von den Ecken gleichweit entfernt ist.

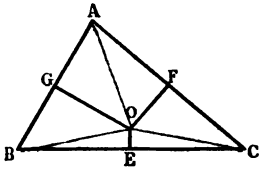


Fig. 21.

2. Das gleiche Verfahren liefert den folgenden Satz: Die drei Medianen der Winkel eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte, der von den Seiten gleichweit entfernt ist.

§ 31. Aufgaben.

1. Auf der gegebenen Strecke AB — Fig. 22 — das Mittellot zu errichten.

Konstruktion. Beschreibe um A und B mit gleichen Radien Kreise, welche sich in C und D schneiden; ziehe CD, welche Linie das verlangte Lot ist.

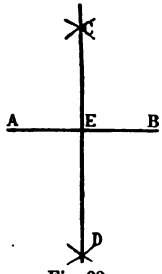


Fig. 22.

Bemerkung. Die Lösung dieser Aufgabe erledigt auch die weitere: die gegebene Strecke AB zu halbieren.

2. Den gegebenen Winkel BAC — Fig. 23 — zu halbieren.

Konstruktion. Trage auf den Schenkeln die gleichen Strecken AB = AC ab. Beschreibe aus B und C mit gleichen Radien Kreisbögen, die sich in E schneiden. Die Gerade AE ist die gesuchte Mediane.

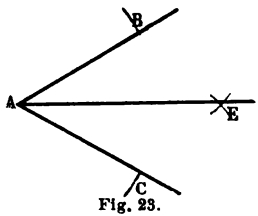


Fig. 23.

3. In einem gegebenen Punkte A — Fig. 24 — einer gegebenen Geraden L das Lot auf dieser zu errichten.

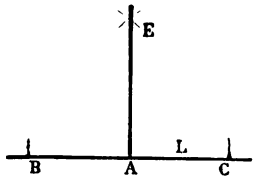


Fig. 24.

Konstruktion. Mache AB = AC und schlage aus B und C mit gleichen Radien Kreisbögen, die sich in E schneiden. Die Gerade AE ist das gesuchte Lot.

4. Von dem gegebenen Punkt A — Fig. 25 — auf die gegebene Gerade L das Lot zu fällen.

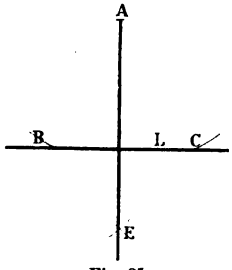


Fig. 25.

Konstruktion. Beschreibe um A einen Kreis, der L in B und C schneidet. Um B und C zeichne mit gleichen Radien Bögen, die sich in E treffen. AE ist das verlangte Lot.

Bemerkung. In den Lösungen der Aufgaben 1—4 sind die Radien der zu zeichnenden Kreise hinreichend gross zu nehmen.

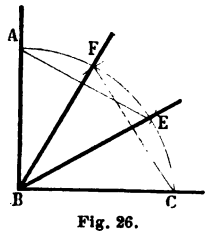


Fig. 26.

5. Den gegebenen rechten Winkel ABC — Fig. 26 — in drei gleiche Teile zu teilen, zu trisezieren.

Konstruktion. Beschreibe um B einen Kreis, welcher die Schenkel in A und C schneidet. Lege in den Quadranten die Sehnen AE und CF gleich dem Radius des Kreises. Ziehe BE und BF. Diese Linien trisezieren den Winkel. —

6. Beweise die Richtigkeit der Konstruktionen 1—5.

§ 32. Uebungen.

1. Sind die Endpunkte zweier Strecken paarweise axial symmetrisch, so sind die Strecken einander gleich.

2. Sind die Schenkel zweier Winkel paarweise axial symmetrisch, so sind die Winkel gleich.

3. Einen Winkel von 75^0, von $97^1/_2{}^0$ zu konstruieren.

4. Einen gestreckten Winkel zu trisezieren.

5. Ist in $\triangle ABC$ die Seite $AB = AC$ und verlängert man BA bis E um AC, so ist die Verbindungslinie $EC \perp BC$.

6. Auf der Strecke AB in ihrem Endpunkte B das Lot zu errichten.

7. In einem gleichschenkligen Dreieck sei ein Basiswinkel das Doppelte des Winkels an der Spitze. Wie gross ist jeder? Was für Dreiecke entstehen durch Halbieren des Basiswinkels?

8. Ist in dem rechtwinkligen $\triangle ABC$ der spitze $\sphericalangle B$ die Hälfte des anderen spitzen $\sphericalangle C$, so ist die Hypotenuse $BC = 2 \cdot CA$. Trifft das Mittellot auf der Hypotenuse diese in D, die AB in E und die verlängerte CA in F, so ist $BE = 2\,EA$; ferner $EF = 2 \cdot DE$ und $AF = CA$.

9. Der geometrische Ort eines Punktes, der von zwei Parallelen gleiche Entfernungen hat, ist die Parallele in mittlerer Entfernung.

10. Auf der gegebenen Geraden L den Punkt zu finden, der a) von zwei Punkten, b) von den Schenkeln eines Winkels, c) von zwei parallelen Linien gleiche Entfernungen hat.

11. Den Punkt zu finden, der von drei gegebenen Punkten gleiche Entfernungen hat.

12. Den Punkt zu finden, der von drei gegebenen Geraden gleiche Entfernungen hat. Wieviele solcher Punkte giebt es?

13. Die Lote, welche man von den Ecken eines Dreiecks auf die Gegenseiten fällen kann, heissen die Höhen des Dreiecks. Die Verbindungslinien der Ecken eines Dreiecks mit den Mitten der Gegenseiten werden die Transversalen, Schwerlinien des Dreiecks genannt. In jedem Dreieck ist die Summe der Höhen kleiner als die Summe der Seiten.

14. Im gleichschenkligen Dreieck sind die Medianen der Basiswinkel einander gleich.

15. Im gleichseitigen Dreieck sind die Höhen einander gleich.

16. Liegt der Punkt D innerhalb des Dreiecks ABC und wird er mit B und C verbunden, so ist a) $DB + DC < AB + AC$ und b) $\sphericalangle BDC > BAC$.

17. In jedem Viereck ist die Summe dreier Seiten grösser als die vierte. Der gleiche Satz gilt für das Fünf-, Sechseck u. s. w. Allgemein: die gerade Linie zwischen zwei Punkten ist kürzer als jede gebrochene oder krumme Linie zwischen diesen Punkten.

18. Im $\angle$ ABC bei $b > c$; ferner $AD \perp BC$. Klappt man $\triangle$ ABD um AD in die Lage DAE um, so ist $\sphericalangle EAC = \beta - \gamma$.

19. Im $\angle$ ABC sei $b > c$; ferner halbiere AD den $\sphericalangle$ BAC. Die Umklappung des $\triangle$ ABD um AD bringt dasselbe in die Lage AED. Beweise, dass $\sphericalangle EBC = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ ist.

20. Jeder Punkt, der nicht auf dem Mittellot der Strecke AB liegt, hat von A und B ungleiche Entfernungen.

21. Jeder Punkt, der nicht auf der Mediane eines Winkels liegt, hat von den Schenkeln ungleiche Entfernungen.

22. Es seien A, B zwei Punkte auf derselben Seite der Geraden L, C ein Punkt auf L. Die Summe $AC + BC$ wird ein Kleinstes, wenn die Strecken AC und BC mit L gleiche Winkel machen. — Anwendung in der Optik. —

23. Innerhalb des spitzen Winkels MAN ist der Punkt B gegeben. Man soll durch B eine den Schenkel AN in X schneidende Gerade so ziehen, dass die Halbierungslinie des $\sphericalangle$ BXA senkrecht auf AM steht.

24. Auf verschiedenen Seiten der Geraden L sind die Punkte A und B gegeben. In L den Punkt X so zu bestimmen, dass AX und BX mit L nach einerlei Seite geöffnete, gleiche Winkel bilden.

6. Kapitel.

Kongruenz.

§ 33. Hilfssatz.

1. Wird ein Parallelenpaar von einem anderen geschnitten — Fig. 27 — so begrenzen die Schnittpunkte parallele Strecken, nämlich AB ∥ DC und AD ∥ BC. Da ferner $\sphericalangle \alpha = \beta$ und $\sphericalangle \delta = \gamma$ ist, so vertauschen nach einer Umdrehung um die Mitte O der BD die parallelen Strecken ihre Lage, woraus AD = BC und AB = DC folgt. D. h.:

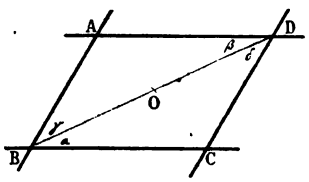


Fig. 27.

Parallele Strecken zwischen parallelen Linien sind gleich.

2. Dieser Satz lässt auch die folgende Umkehrung zu. Ist AD ⧺ BC (gleich und parallel), so ist auch AB ⧺ DC. (Beweis!)

§ 34. Parallelverschiebung.

1. Wenn in Fig. 28 AC und BD parallel gehen, so bilden sie mit der Geraden L gleiche Winkel, $\sphericalangle \alpha = \beta$. Bewegt sich nun $\sphericalangle$ ABD in der Weise in der Ebene, dass der Schenkel BA stets in L bleibt, so lässt er sich mit $\sphericalangle \alpha$ zur Deckung bringen. Es fällt BD längs AC; ist zugleich die Strecke AC = BD, so fallen auch C und D zusammen.

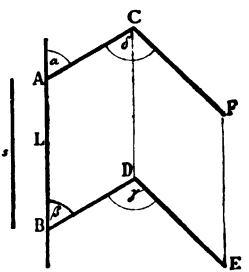


Fig. 28.

Ergänzt man die Figur in der Weise, dass man $\sphericalangle \gamma = \delta$ und $DE = CF$ macht, so deckt nach der Bewegung der Linienzug BDE den Zug ACF. Da nun $AC \parallel BD$, ebenso $CF \parallel DE$ ist, so folgt unter Anwendung des § 33, 2, dass $AB \parallel CD \parallel FE$ ist. Die Bewegung einer Figur von der Art, dass die Punkte der Figur in der Ebene bleiben und die Punkte einer gewissen Geraden sich auf dieser Geraden verschieben, nennt man Parallelverschiebung der Figur längs jener Geraden, und letztere heisst Leit- oder Richtlinie. Aus Obigem folgt nun:

Bei einer Parallelverschiebung legen alle Punkte gleiche, unter sich und mit der Richtlinie parallele Strecken zurück.

Ferner: Bei einer Parallelverschiebung bleibt eine Strecke ihrer Anfangslage stets parallel; liegt die Strecke auf einer zur Richtlinie parallelen Geraden, so verschiebt sie sich in dieser Geraden.

2. Stücke, welche durch Parallelverschiebung zur Deckung gelangen, heissen homolog, entsprechend. Solche Stücke sind einander gleich.

3. Aufgabe. Den gegebenen Punkt D — Fig. 28 — um die Strecke s parallel zu verschieben, wenn L die Richtlinie ist.

Konstruktion. Ziehe $DC \parallel L$ und mache sie gleich s; dann ist C die gesuchte Lage des Punktes D.

4. Aufgabe. Die gegebene Strecke DE — Fig. 28 — um s zu verschieben, wenn L die Richtlinie ist.

Konstruktion. Verschiebe nach voriger Aufgabe die Punkte D und E nach C und F, so ist CF die gesuchte Lage.

§ 35. Drehung um einen beliebig grossen Winkel.

1. Wird in Fig. 29 irgend ein Strahl OA um den $\sphericalangle \varphi$ in der Ebene gedreht, wodurch er in die Lage OB gebracht wird, so gelangt einer seiner Punkte A nach B, wenn $OB = OA$ ist. D. h.:

Bei der Drehung bewahrt jeder Punkt seinen Abstand vom Zentrum der Drehung.

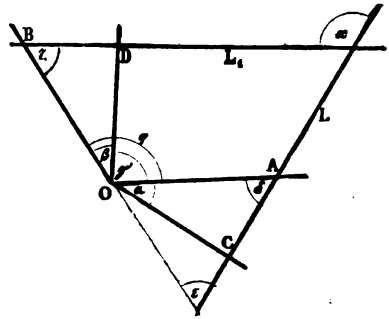


Fig. 29.

2. Nimmt bei dieser Drehung der Strahl OA den Strahl OC mit, so ist, wenn $\sphericalangle \beta = \alpha$ gemacht wird, OD die Endlage des letzteren. Da nun $\sphericalangle \varphi = \gamma + \beta$, $\sphericalangle \beta = \alpha$ ist, so folgt auch $\sphericalangle \varphi = \gamma + \alpha = DOC$. D. h.:

Bei einer Drehung legt jeder durch den Drehpunkt gezogene Strahl den gleichen Winkel zurück.

3. Um die Endlage L_1 der Geraden L zu bestimmen, kann man zwei ihrer Punkte A und C um den $\sphericalangle \varphi$ drehen, oder nur den einen Punkt A und zugleich berücksichtigen, dass $\sphericalangle \zeta = \delta$ sein muss. Alsdann hat man, wenn BO bis zum Schnitt mit L verlängert wird, $\sphericalangle x = \varepsilon + \zeta$, ebenso $\sphericalangle \varphi = \varepsilon + \delta$; weil aber $\sphericalangle \zeta = \delta$ ist, so ergiebt sich $\sphericalangle x = \varphi$. D. h.:

Bei der Drehung einer Figur beschreibt jede Gerade den gleichen Winkel.

Bemerkung. Auf diesem Satze beruht die Verwendung des „Winkels" zur Konstruktion einer Senkrechten.

4. Fällt man von dem Drehpunkte O — Fig. 30 — auf die Gerade L das Lot OA, so kann sich bei der Drehung nach den obigen Erörterungen weder die Länge OA noch die Grösse des $\sphericalangle \alpha$ ändern, woraus folgt: Der Abstand einer Geraden vom Mittelpunkt der Bewegung bleibt bei der Drehung unverändert. Diese Eigenschaft bietet ein einfaches Mittel dar, eine Gerade um einen gegebenen Winkel zu drehen.

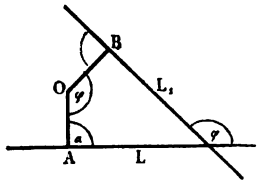


Fig. 30.

§ 36. Drehung von Strecken und Winkeln.

1. Aus den Eigenschaften des Mittellots und der Winkelhalbierenden folgt: a) Der Punkt B kann zur Deckung mit einem anderen Punkte A gebracht werden, wenn man ihn um irgend einen Punkt des Mittellots der AB dreht. b) Die Gerade L kann mit einer sie schneidenden L′ zur Deckung gebracht werden, wenn sie um irgend einen Punkt der Mediane eines des von L und L′ gebildeten Winkels gedreht wird.

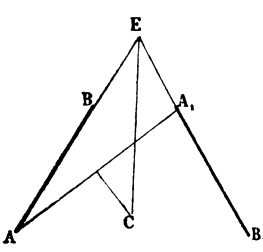


Fig. 31.

2. Aufgabe. Die gegebene Strecke A′B′ — Fig. 31 — durch Drehung mit der ihr gleichen nicht parallelen AB zur Deckung zu bringen.

Konstruktion. Verlängere AB und B′A′ bis zu ihrem Schnitt in E. Errichte auf AA′ das Mittellot und halbiere den $\sphericalangle$ AEB′. Die Mediane trifft das Lot in C, dem gesuchten Drehpunkt. — Die Mediane kann man auch durch das Mittellot auf BB′ ersetzen.

3. Aufgabe. Den gegebenen Winkel BAC — Fig. 32 — durch Drehung mit dem ihm gleichen, beliebig liegenden B′A′C′ zur Deckung zu bringen.

Konstruktion. Halbiere den ∢ ADB′ und errichte auf AA′ das Mittellot, welches die Mediane in O, dem gesuchten Drehpunkte, schneidet. — Das Mittellot kann auch durch die Halbierungslinie des ∢ A′EC ersetzt werden.

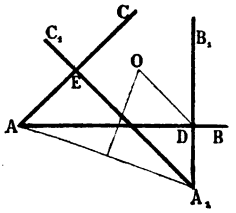


Fig. 32.

Bemerkung. Es kann notwendig werden, den einen Winkel vor der Drehung um den einen seiner Schenkel umzuklappen.

4. Durch welche Bewegung werden gleiche, parallele Strecken zur Deckung gebracht; ferner gleiche Winkel, deren Schenkel paarweise parallel gehen? (Je zwei Fälle!)

§ 37. Kongruenz der Dreiecke.

1. Zwei Figuren sind kongruent (≅), wenn sie zur Deckung gebracht, vollständig in eine zusammenfallen. Homolog, entsprechend heissen diejenigen Stücke, die bei der Deckung aufeinander zu liegen kommen. — Das Zeichen ≅ rührt von Leibniz (1646 bis 1716) her.

2. Homologe Stücke sind einander gleich.

3. Die Deckung zweier kongruenter Figuren kann durch Umklappung, Parallelverschiebung und Drehung bewerkstelligt werden, und zwar kann eine dieser Bewegungen ausreichen, oder es müssen zwei nach einander ausgeführt werden.

4. Zwischen den einzelnen Stücken einer Figur besteht ein derartiger Zusammenhang, dass die Grösse

einiger genügt, um die der übrigen zu ermitteln. Die Anzahl der für eine Figur notwendigen Stücke wird durch die Lehre von der Kongruenz ermittelt. So sind, wie nachfolgende Sätze darthun, für die vollständige Bestimmung eines Dreiecks nur drei von einander unabhängige Stücke erforderlich. Da ferner in kongruenten Figuren die entsprechenden Stücke einander gleich sind, so wird die Kongruenz der Figuren zu einem vorzüglichen Hilfsmittel, die Gleichheit von Strecken, bezw. von Winkeln zu beweisen.

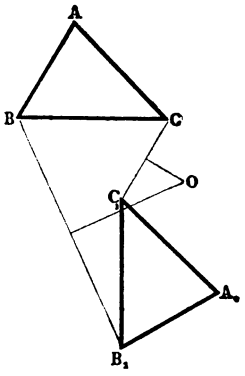


Fig. 33.

§ 38. Erster Kongruenzsatz.

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.

Beweis. — Fig. 33. — Gegeben sind die Dreiecke ABC, A′B′C′, in denen B′C′ = BC, B′A′ = BA, ∢ B′ = B ist. Durch die in § 37, 3 aufgeführten Bewegungen, hier durch Drehung um O mit nachfolgender Umklappung, lässt sich B′C′ mit BC und zwar B′ mit B, C′ mit C zur Deckung bringen. Da ferner ∢ B′ = B ist, so fällt B′A′ längs BA und weil B′A′ = BA ist, so decken sich auch die Endpunkte A′ und A. Weil nun zwischen zwei Punkten nur eine Gerade möglich ist, so decken sich auch die Seiten A′C′ und AC. Daher ist △ ABC ≅ A′B′C′.

Bemerkung. Die in § 38—41 angeführten Bewegungen sollen mittelst Pauspapiers ausgeführt werden.

§ 39. Zweiter Kongruenzsatz.

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in einer Seite und zwei Winkeln übereinstimmen.

Beweis. — Fig. 34. — Gegeben sind die Dreiecke ABC und A′B′C′, in welchen B′C′ = BC, ∢ B′ = B, ∢ C′ = C ist. Durch die in § 37, 3 angeführten Bewegungen, hier durch Drehung um O, kann B′C′ mit BC und zwar B′ mit B, C′ mit C zur Deckung gebracht werden. Da nun ∢ B′ = B und ∢ C′ = C ist, so fällt B′A′ in die Richtung BA und C′A′ längs CA. Zwei Geraden schneiden sich jedoch nur in einem Punkte. Mithin deckt auch A′ den Punkt A. Die Dreiecke sind kongruent.

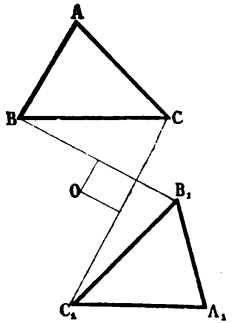


Fig. 34.

Bemerkung. Würde vorausgesetzt, dass ∢ B′ = B, ∢ A′ = A ist, so wäre doch auch ∢ C′ = C.

§ 40. Dritter Kongruenzsatz.

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in den drei Seiten übereinstimmen.

Beweis. — Fig. 35. — Es ist vorausgesetzt, dass in den Dreiecken ABC und A′B′C′ Seite B′C′ = BC, C′A′ = CA, A′B′ = AB ist. Durch die in § 37, 3 angeführten Bewegungen, hier durch Parallelverschiebung längs CC′ und nachfolgende Umklappung, bringe man das Dreieck A′B′C′ in die Lage BCD und zwar so, dass B′ auf B und C′ auf C fällt. Ziehe alsdann AD.

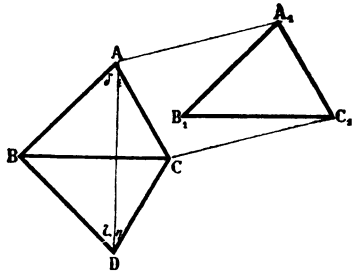


Fig. 35.

Da nach der Voraussetzung $B'A' = BA$ und ausserdem $B'A' = BD$ ist, so ergiebt sich zunächst $BA = BD$ und daraus $\sphericalangle \delta = \zeta$. Ebenso findet man $\sphericalangle \varepsilon = \eta$. Die Addition liefert $\sphericalangle A = D$, somit ist auch $\sphericalangle A = A'$ und folglich $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

§ 41. Vierter Kongruenzsatz.

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der grösseren Seite übereinstimmen.

Beweis. — Fig. 36. — Gegeben sind die Dreiecke ABC und A'B'C', in denen $B'C' = BC$, $B'A' = BA$, $\sphericalangle C' = C$, $AB > BC$, $A'B' > B'C'$ ist. Durch die in § 37, 3 angeführten Bewegungen, hier durch Drehung um O, bringe man B'C' mit BC und zwar B' mit B, C' mit C zur Deckung. Da ferner $\sphericalangle C' = C$ ist, so muss C'A' längs CA fallen und A' auf A, wie sich durch ein indirektes Verfahren darthun lässt. Wäre nämlich $AC > A'C'$,

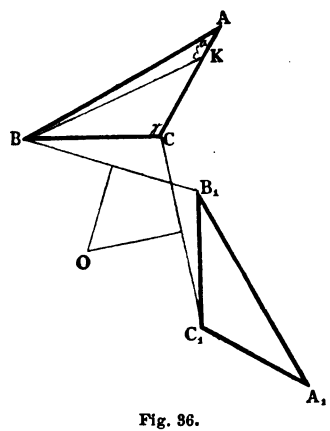


Fig. 36.

so fällt A′ auf K, wenn $CK = C'A'$ gemacht wird. Nun ist $\triangle BCK \cong B'C'A'$, woraus $BK = B'A'$ folgt. Es ist aber auch $BA = B'A'$, somit ist $BA = BK$, daher $\sphericalangle \alpha = \delta$. Auf Grund des § 21, 2 ist $\sphericalangle \delta > \gamma$, mithin auch $\sphericalangle \alpha > \gamma$, was nach § 26, 2 $BC > BA$ zur Folge hat. Dieses Ergebnis widerspricht der Voraussetzung; es kann sonach die Annahme $AC > A'C'$ nicht richtig sein. In gleicher Weise führt die Annahme $AC < A'C'$ auf einen Widerspruch. Also ist $AC = A'C'$ und damit $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

§ 42. Aufgaben über das Dreieck.

Eine Figur aus gegebenen Stücken **konstruieren** heisst eine Figur herstellen, die einer andern kongruent ist, welche die gegebenen Stücke enthält. Die konstruierte Figur liefert zugleich die Grösse der übrigen Stücke.

1. Ein Dreieck aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel zu konstruieren.

2. Ein Dreieck aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln zu konstruieren.

3. Ein Dreieck aus einer Seite, einem anliegenden und dem gegenüberliegenden Winkel zu konstruieren.

4. Ein Dreieck aus den drei Seiten zu konstruieren.

5. Ein Dreieck aus zwei Seiten und dem Gegenwinkel der grösseren Seite zu konstruieren.

6. Ein Dreieck aus zwei Seiten und dem Gegenwinkel der kleineren Seite zu konstruieren.

Bemerkungen. Die Lösungen dieser Aufgaben sind einfach. Die Konstruktion der letzten Aufgabe liefert zwei nicht kongruente Dreiecke, die beide den gestellten Bedingungen genügen.

§ 43. Bezeichnung der Höhen, Transversalen etc. eines Dreiecks.

1. Die Höhen von den Ecken A, B, C eines Dreiecks werden der Reihe nach mit h_a, h_b, h_c bezeichnet.

2. Die Transversalen von den Ecken A, B, C eines Dreiecks bezeichnet man mit t_a, t_b, t_c.

3. Die Medianen von den Ecken A, B, C eines Dreiecks werden mit w_a, w_b, w_c bezeichnet.

4. Das Lot AD auf BC im Dreieck ABC teilt BC in die Abschnitte CD und BD, die mit p bezw. q bezeichnet werden.

5. Die Mediane AE auf BC teilt diese in die Abschnitte CE und BE, die mit u bezw. v bezeichnet werden.

§ 44. Uebungen.

1. Einen gegebenen Kreis um die Strecke s bei gegebener Richtlinie zu verschieben.

2. Einen gegebenen Kreis um den $\sphericalangle \varphi$ zu drehen, wenn der Drehpunkt gegeben ist.

3. Zwei nicht parallele Strahlen durch Drehung zur Deckung zu bringen.

4. Bestimme den Mittelpunkt der Drehung für zwei gleich lange Strecken AB und A'B', die so liegen, dass $AA' \parallel BB'$ geht.

5. Zwei rechtwinklige Dreiecke sind kongruent, wenn sie übereinstimmen in a) den beiden Katheten, b) einer Kathete und einem spitzen Winkel, c) der Hypotenuse und einem spitzen Winkel, d) der Hypotenuse und einer Kathete.

6. a) Wenn zwei Dreiecke in einer Seite und einem anliegenden Winkel übereinstimmen, so liegt dem grösseren der beiden anderen anliegenden Winkel auch die grössere Seite gegenüber; b) Wenn zwei Dreiecke in zwei Seiten überientsimmen, so liegt dem grösseren ein-

geschlossenen Winkel auch die grössere Seite gegenüber und umgekehrt.

7. Unter welche Länge darf in § 42, 6 die kleinere Seite nicht herabsinken, wenn die Lösung möglich sein soll?

8. Im rechtwinkligen Dreieck steht A an der Spitze des rechten Winkels. Konstruiere ein solches Dreieck aus b, c.

9. Ebenso aus a, b; 10. aus b, γ; 11. aus b, β; 12. aus a, β.

13. Im gleichschenkligen Dreieck wird die Spitze mit A bezeichnet. Konstruiere ein solches Dreieck aus a, b.

14. Ebenso aus b, β; 15. aus b, α; 16. aus a, β; 17. aus a, α.

18. Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck aus a.

19. Ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck aus a zu konstruieren.

20. Ebenso aus b.

21. Wieviele von einander unabhängige Stücke bestimmen ein gewöhnliches Dreieck, ein gleichschenkliges, ein rechtwinkliges, ein gleichseitiges, ein gleichschenklig rechtwinkliges?

22. In kongruenten Dreiecken sind die homologen Höhen, Transversalen, Medianen einander gleich.

23. Ein Dreieck aus der Seite a, der zu ihr gehörigen Höhe h_a und der auf sie gezogenen Transversale t_a zu konstruieren; oder $\triangle$ aus a, h_a, t_a.

24. $\triangle$ aus c, h_a, t_a; 25. $\triangle$ aus h_a, t_a, β; 26. $\triangle$ aus c, w_a, α; 27. $\triangle$ aus b, h_a, w_a; 28. $\triangle$ aus a, α, h_b; 29. $\triangle$ aus a, c, t_c.

30. Gleichschenkliges $\triangle$ aus a, h_a. 31. Ebenso aus b, h_a. 32. Ebenso aus a, h_b. 33. Ebenso aus h_a, α.

34. Gleichseitiges Dreieck aus h_a.

35. Gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck aus h_a.

36. $\triangle$ aus a, b, b + c; 37. $\triangle$ aus a, b, b − c; 38. $\triangle$ aus a + b, b − c, c; 39. $\triangle$ aus p, q, a + c; 40. $\triangle$ aus u, b, w_a.

7. Kapitel.

Das Parallelogramm und das Trapez.

§ 45. Sätze über das Parallelogramm.

1. Ein Viereck, dessen Gegenseiten parallel gehen, heisst ein Parallelogramm.

2. Aus § 33 folgt: In jedem Parallelogramm sind die Gegenseiten einander gleich.

3. Zusätze. a) Sind in einem Parallelogramm zwei anstossende Seiten gleich, so sind alle vier gleich gross. b) Alle senkrechten Strecken zwischen zwei Parallelen sind einander gleich; oder zwei Parallelen haben überall gleichen Abstand.

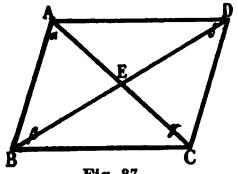


Fig. 37.

4. Fig. 37. Da $\sphericalangle \alpha + \beta = 2\,R$ ist, und ebenso $\sphericalangle \beta + \gamma = 2\,R$, so ergiebt sich $\sphericalangle \alpha = \gamma$ und analog $\sphericalangle \beta = \delta$. D. h.:

In jedem Parallelogramm sind die gegenüberliegenden Winkel einander gleich.

5. Zusatz. Ist in einem Parallelogramm ein Winkel ein rechter, so sind es alle.

6. Werden in Fig. 37 die beiden Diagonalen gezogen, so lässt sich zeigen, dass die beiden Dreiecke BCE und AED kongruent sind. Hieraus folgt $BE = DE$ und $CE = AE$. In Worten:

In jedem Parallelogramm halbieren die Diagonalen einander.

Frage. Durch welche Bewegung bringt man die beiden Dreiecke zur Deckung?

7. Jedes Parallelogramm ist für den Schnittpunkt seiner Diagonalen zentrisch symmetrisch.

8. Zieht man — Fig. 38 — durch den Mittelpunkt E der Diagonale AC des Parallelogramms ABCD die Parallele mit BC, welche AB in F, CD in G schneidet, so fällt nach einer Umdrehung um E die Strecke AF auf CG. Demnach ist $AF = CG$. Es ist aber auch nach Satz 2 dieses Paragraphen $AF = DG$. Hieraus folgt $CG = GD$ und entsprechend $BF = FA$.

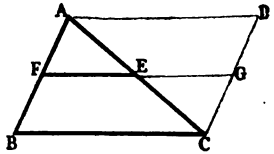


Fig. 38.

Ferner decken sich nach der Umdrehung auch die Strecken FE und EG; folglich ist $FE = EG$. Weiter ist $FG = BC$, somit $EF = \frac{1}{2}BC$. Werden diese Ergebnisse in der Weise ausgesprochen, dass man nur das Dreieck ABC berücksichtigt, so erhält man die Sätze:

Zieht man in einem Dreieck durch die Mitte einer Seite die Parallele zu einer zweiten, so wird auch die dritte Seite halbiert. Die in das Dreieck fallende Strecke der Parallele ist die Hälfte der zweiten Seite.

9. Die Linie EF heisst die Mittelparallele des Dreiecks ABC.

§ 46. Kehrsätze.

Die Lehrsätze des vorigen Paragraphen lassen sich umkehren, wodurch man zu folgenden Sätzen gelangt:

1. Ein Viereck ist ein Parallelogramm, wenn zweimal zwei Gegenseiten gleich sind; oder wenn einmal zwei Gegenseiten gleich und parallel sind; oder wenn zweimal zwei gegenüberliegende Winkel gleich sind; oder wenn die beiden Diagonalen einander halbieren.

2. Die Verbindungsstrecke der Mitten zweier Seiten eines Dreiecks ist der dritten Seite parallel und die Hälfte dieser. Diese Strecke wird die Mittellinie des Dreiecks genannt.

Beweise diese Sätze!

3. Zusatz. Haben zwei Punkte einer Geraden von einer zweiten gleichen Abstand, so sind die Geraden parallel.

4. Der geometrische Ort eines Punktes, der von einer gegebenen Geraden den unveränderlichen Abstand a hat, besteht aus zwei Parallelen zu dieser Geraden im Abstande a.

§ 47. Einteilung der Parallelogramme.

Die Parallelogramme zerfallen hinsichtlich der Seiten in gleichseitige und ungleichseitige, hinsichtlich der Winkel in rechtwinklige und schiefwinklige. Im besonderen erhält man vier Arten:

a) Das Quadrat, d. i. ein gleichseitig rechtwinkliges Parallelogramm;
b) Das Rechteck, d. i. ein ungleichseitig rechtwinkliges Parallelogramm;
c) Den Rhombus, d. i. ein gleichseitig schiefwinkliges Parallelogramm;
d) Das Rhomboid, d. i. ein ungleichseitig schiefwinkliges Parallelogramm.

§ 48. Eigenschaften der gleichseitigen Parallelogramme.

1. Es seien — Fig. 39 — AC und BD die Diagonalen des gleichseitigen Parallelogramms ABCD. Dieselben zerlegen die Figur in vier Dreiecke, von

denen z. B. AEB ≅ AED (3. Kongruenzsatz). Hieraus ergiebt sich $\sphericalangle \eta = \vartheta$; ihre Summe ist jedoch 2 R, daher $\sphericalangle \eta = \vartheta = 1$ R, d. h. AC ⊥ BD. Sodann ist $\sphericalangle \delta = \zeta$ (Basiswinkel) und $\sphericalangle \varepsilon = \zeta$ (Wechselwinkel); folglich $\sphericalangle \delta = \varepsilon$. In Worten: In jedem gleichseitigen Parallelogramm stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander und halbieren die Winkel.

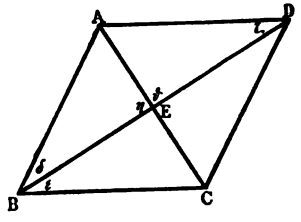


Fig. 39.

Bemerkung. Durch welche Bewegung wird △ AEB zur Deckung mit AED gebracht?

2. Jedes gleichseitige Parallelogramm ist für jede der beiden Diagonalen axial symmetrisch.

§ 49. Eigenschaften der rechtwinkligen Parallelogramme.

1. Ist ABCD — Fig. 40 — ein rechtwinkliges Parallelogramm, so lässt sich die Kongruenz der beiden Dreiecke ABC, DCB darthun (1. Kongruenzsatz), folglich ist AC = BD. D. h.: In jedem rechtwinkligen Parallelogramm sind die Diagonalen gleich lang.

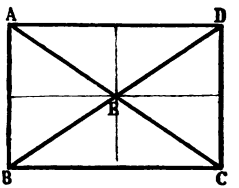


Fig. 40.

Bemerkung. Zieht man durch E die Parallele zu AB, so kann man die oben angeführten Dreiecke durch Umwenden um diese Gerade zur Deckung bringen.

2. Jedes rechtwinklige Parallelogramm hat zwei Symmetrieachsen, nämlich die durch den Schnittpunkt der Diagonalen zu den Seiten gezogenen Parallelen.

3. Im Quadrat sind die Diagonalen gleich lang, sie stehen senkrecht aufeinander und halbieren die Winkel.

§ 50. Konstruktion der Parallelogramme.

Die einfacheren, hierher gehörigen Aufgaben werden in der Weise gelöst, dass man zunächt eines der Dreiecke konstruiert, in welche das Parallelogramm durch die Diagonalen zerlegt wird. Z. B. — Fig. 37 — $\triangle$ ABC oder $\triangle$ BCE. Im ersteren Falle zieht man hierauf CD $\parallel$ BA und AD $\parallel$ BC; im anderen Falle verlängert man BE um sich selbst bis D und ebenso CE bis A. Das Grunddreieck ABC ist beim Rhomboid ungleichseitig, beim Rechteck rechtwinklig, beim Rhombus gleichschenklig, beim Quadrat gleichschenklig rechtwinklig. Demnach erfordert die Konstruktion des Rhomboids 3, des Rechtecks 2, des Rhombus 2 von einander unabhängige Stücke, während das Quadrat zu seiner Herstellung eine Strecke verlangt.

§ 51. Sätze über das Trapez.

1. Ein Viereck heisst Trapez, wenn ein Paar Gegenseiten parallel ist. Diese Linien werden Grundseiten, ihr Abstand Höhe genannt. Die beiden anderen Gegenseiten heissen Nebenseiten. Im allgemeinen sind dieselben ungleich; im besonderen können sie gleich sein, ohne parallel zu liegen. Dann heisst das Trapez gleichschenklig.

2. In dem Trapez ABCD — Fig. 41 — sei E die Mitte der AB, ferner EF $\parallel$ BC gezogen. Es sollen die Eigenschaften dieser wichtigen Linie, der Mittelparallele, erforscht werden. Zur Erreichung des ge-

nannten Zweckes zerlege man durch DH ∥ AB die Figur in das Parallelogramm ABHD und das △ DHC. Weil AE = EB ist, so erhält man auch DG = GH. Nach § 45, 8 ist dann DF = FC. In Worten:

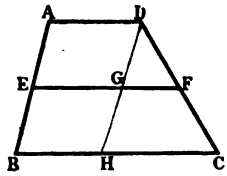


Fig. 41.

Zieht man im Trapez durch die Mitte einer Nebenseite die Parallele mit den Grundseiten, so wird auch die andere Nebenseite halbiert.

Des weiteren ist $EF = EG + GF = AD + \frac{1}{2}HC = \frac{2AD + HC}{2} = \frac{AD + BH + HC}{2} = \frac{AD + BC}{2}$. D. h.: Die Mittelparallele eines Trapezes ist das arithmetische Mittel aus den beiden Grundseiten.

§ 52. Teilung einer Strecke.

Aufgabe. Die gegebene Strecke AB in eine Anzahl gleicher Teile, z. B. fünf, zu teilen.

Konstruktion. — Fig. 42. — Ziehe durch A die Gerade AC, trage auf ihr 5 gleiche Strecken AD = DE = EF = FG = GH ab; verbinde H mit B. Hierauf lege durch D, E, F, G Linien parallel HB, welche die AB in den verlangten Teilpunkten J, K, L, M schneiden.

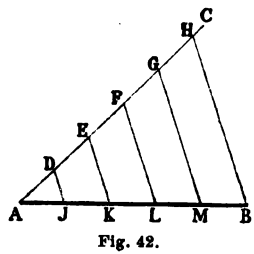


Fig. 42.

Beweis. Es ist DJ die Mittelparallele des Dreiecks AEK, daher nach § 45, 8 ist AJ = JK. Ferner ist EK die Mittelparallele des

Trapezes DJLF, folglich nach § 51 JK = KL. Analog findet man auch KL = LM = MB; mithin ist AJ = JK = KL = LM = MB.

§ 53. Das gleichschenklige Trapez.

1. Um die Eigenschaften dieses Trapezes kennen zu lernen, wird es — Fig. 43 — durch AE ∥ DC in ein Dreieck und ein Parallelogramm zerschnitten. Nun ist AE = DC (Gegenseiten); aber nach Voraussetzung ist AB = DC, daher AB = AE, was $\sphericalangle \beta = \varepsilon$ zur Folge hat. Ferner ist $\sphericalangle \varepsilon = \gamma$ (Gegenwinkel), somit $\sphericalangle \beta = \gamma$ und entsprechend $\sphericalangle$ A = D; d. h.:

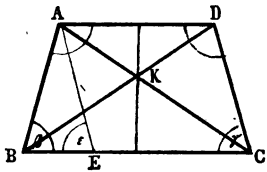


Fig. 43.

In jedem gleichschenkligen Trapez sind die Winkel an derselben Grundlinie einander gleich.

2. Eine andere Eigenschaft wird erhalten, wenn man die Diagonalen AC und BD zieht, wodurch die kongruenten Dreiecke ABC und DCB (1. Kongruenzsatz) entstehen. Diese Verwandtschaft liefert das Ergebnis AC = BD, wie auch $\sphericalangle$ ACB = DBC, woraus CK = BK und KA = KD folgt. In Worten: In jedem gleichschenkligen Trapez sind die Diagonalen, deren untere bezw. obere Abschnitte einander gleich.

Frage. Wie bringt man △ ABC mit DCB zur Deckung?

3. Das gleichschenklige Trapez hat das Lot, welches man aus dem Schnittpunkt der Diagonalen auf die Grundseiten fällt, zur Symmetrieachse.

§ 54. Konstruktion der Trapeze.

Um die einfacheren Aufgaben zu lösen, denke man sich das Trapez durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerlegt. Diese konstruiert man nach einander. Gute Dienste leistet ferner die durch eine Ecke zu einer Nebenseite parallel gezogene Linie, wodurch das Trapez in ein Dreieck und ein Parallelogramm geteilt wird. Die Konstruktion des gemeinen Trapezes erfordert vier, die des gleichschenkligen drei von einander unabhängige Stücke.

§ 55. Uebungen.

Bezeichnung. Im Viereck ABCD werden AB, BC, CD, DA, AC und BD mit a, b, c, d, e, f bezeichnet; $\sphericalangle$ A, B, C, D mit α, β, γ, δ; der Winkel, unter dem sich die Diagonalen schneiden, mit ε. Im Trapez sind BC, AD die Grundseiten.

1. Ein Parallelogramm ist gleichseitig, wenn die Diagonalen senkrecht auf einander stehen.

2. Ein Parallelogramm ist gleichseitig, wenn ein Winkel von der betreffenden Diagonale halbiert wird.

3. Ein Parallelogramm ist rechtwinklig, wenn die Diagonalen gleich lang sind.

4. Im rechtwinkligen Dreieck ist die Transversale nach der Hypotenuse die Hälfte dieser.

5. Ein Parallelogramm ist ein Quadrat, wenn die Diagonalen auf einander senkrecht stehen und einander gleich sind; 6. oder wenn die Diagonalen einander gleich sind und ein Winkel von der betreffenden Diagonale halbiert wird.

7. Die Verbindungslinie der Mitten der Nebenseiten eines Trapezes ist den Grundseiten parallel.

8. Die Geraden, welche durch die Ecken A, B, C des $\triangle$ ABC parallel den Gegenseiten gelegt werden, bilden ein Dreieck, dessen Seiten in A, B, C halbiert sind.

9. Die Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt. — Mit Hilfe von Nr. 8. — Der Höhenschnittpunkt ist der dritte merkwürdige Punkt des Dreiecks.

10. Die Mitten der Seiten und der beiden Diagonalen eines Vierecks sind die Ecken von drei Parallelogrammen, die denselben Mittelpunkt haben. Ermittle auch den Umfang eines jeden dieser Parallelogramme.

11. Die Mitten der Seiten eines Rhombus sind die Ecken eines Rechtecks.

12. Wie heisst der entsprechende Satz für das Rechteck, für das Quadrat?

13. Das Lot von der Mitte einer Dreiecksseite auf eine andere ist halb so lang als die zum Lote parallele Höhe des Dreiecks.

14. Die Verbindungsstrecken der Seitenmitten eines Dreiecks teilen dasselbe in vier kongruente Dreiecke.

15. Die Lote von den Endpunkten einer Dreiecksseite auf die zu ihr gehörige Transversale sind einander gleich.

16. Fällt man von den Ecken und dem Schnittpunkt der Diagonalen eines Parallelogramms Lote auf irgend eine Gerade, so ist letzteres das arithmetische Mittel der vier ersteren.

17. Parallelogramm aus a, b, β; 18. aus a, b, e; 19. aus e, f, ε; 20. aus b, f, ε.

21. Rhombus aus e, f; 22. aus a, α; 23. aus a, e.

24. Rechteck aus a, b; 25. aus a, f; 26. aus f, ε. 27. aus a, ε.

28. Quadrat aus a; 29. aus f; 30. aus dem Umfang.

31. Trapez aus a, b, c, β; 32. aus a, b, d, α; 33. aus b, c, e, f; 34. aus a, b, c, d.

35. Gleichschenkliges Trapez aus a, b, β; 36. aus a, b, e; 37. aus a, b, d.

38. Viereck aus a, b, c, d, e; 39. aus a, b, d, e, f; 40. aus a, b, c, d, β; 41. aus a, b, d, f, β; 42. aus b, e, f, β, γ.

43. Durch den Punkt A zu L mit Hilfe eines Rhombus die Parallele zu konstruieren.

44. Zwischen die Schenkel des gegebenen $\sphericalangle$ A die Strecke $XY = s$ und $\parallel L$ zu legen.

45. Gegeben $L \parallel L'$ und der Punkt A. Durch A eine die L in X, die L' in Y schneidende Linie so zu ziehen, dass $XY = s$ werde.

46. Gegeben die Geraden L und L'. Gesucht wird der Punkt, welcher von L die Entfernung a, von L' die Entfernung b hat.

47. Gegeben die Gerade L und der Punkt P. Gesucht wird der Punkt, welcher von L und P die Entfernung a bezw. b hat.

48. Den Mittelpunkt eines Parallelogramms zu finden dessen Ecken nicht zugänglich sind.

49. Von einem Punkte A ausserhalb einer Geraden auf diese das Lot zu fällen, wenn sich die Gerade mit der Zirkelöffnung nicht erreichen lässt.

50. Einen Winkel, dessen Scheitel nicht zugänglich ist, zu halbieren.

51. Die Hälfte eines Winkels zu zeichnen, ohne ihn zu halbieren.

52. In entsprechender Weise einen Winkel zu verdoppeln.

53. Die Entfernung zweier Punkte zu finden, wenn ein Hindernis die direkte Messung nicht zulässt.

54. Auf dem Felde die Entfernung zweier sichtbaren Punkte zu messen, wenn der eine unzugänglich ist.

55. Von einem Punkte aus drei gegebene Strecken so zu ziehen, dass ihre Endpunkte auf einer Geraden liegen.

56. Ein Dreieck zu konstruieren, dessen Seitenmitten gegeben sind.

57. Zwischen zwei Parallelen ist eine Strecke gelegt. Die Figur wird um 90° um einen Punkt der Mittelparallele gedreht. Welchen Satz gewinnt man auf diese Weise?

58. Ein Quadrat zu konstruieren, dessen Seiten durch vier gegebene Punkte gehen.

59. Welchen Satz erhält man aus Nr. 57, wenn um den $\sphericalangle \alpha$ gedreht wird?

60. Einen Rhombus zu konstruieren, von dem ein Winkel gegeben ist, und dessen Seiten durch vier gegebene Punkte gehen sollen.

---

8. Kapitel.

Der Kreis.

§ 56. Kreis und Gerade.

Vergleicht man den Abstand einer Geraden von dem Zentrum eines Kreises mit der Länge des Halbmessers, so ergeben sich unter Beiziehung der Sätze in § 28 die Thatsachen:

a) Eine Gerade schneidet den Kreis nicht, wenn ihre Entfernung vom Zentrum grösser als der Radius ist.

b) Eine Gerade schneidet den Kreis in zwei Punkten, wenn ihre Entfernung vom Mittelpunkt kleiner als der Halbmesser ist; die beiden Schnittpunkte liegen für den zur Geraden senkrechten Durchmesser symmetrisch.

c) Eine Gerade hat mit dem Kreise nur einen Punkt gemein, wenn ihr Abstand vom Zentrum gleich dem Radius ist. Sie heisst Tangente, der gemeinsame Punkt Berührungspunkt, der Halbmesser nach demselben Berührungsradius.

§ 57. Die Sehne.

1. Der Mittelpunkt C — Fig. 44 — und die beiden Endpunkte A, B der Sehne AB bilden ein gleichschenkliges Dreieck. Ueberträgt man auf dasselbe die

die in § 6 und 27 gefundenen Beziehungen, so ergiebt sich: Der Radius, welcher einen Zentriwinkel halbiert, halbiert den dazu gehörigen Bogen, die zugehörige Sehne und steht senkrecht auf ihr.

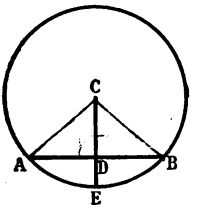


Fig. 44.

Der Radius CE ist mithin Mediane, Höhe, Transversale und Mittellot. Diese vier Linien fallen in eine zusammen und deswegen kommen jeder die Eigenschaften der übrigen zu. Insbesondere ist zu bemerken, dass das auf einer Sehne errichtete Mittellot durch das Zentrum des Kreises geht.

2. Der geometrische Ort des Mittelpunkts für alle Kreise, die durch zwei gegebene Punkte gehen, ist das Mittellot auf der Verbindungsstrecke.

3. Zusatz. Parallele Sehnen werden durch den zu ihnen senkrechten Durchmesser halbiert. Grenzlagen!

§ 58. Der Kreis durch drei Punkte.

Aufgabe. Den Kreis zu finden, der durch die drei gegebenen Punkte A, B, C geht.

Konstruktion. Verbinde die Punkte miteinander und errichte auf zwei Seiten des △ ABC die Mittelsenkrechten. Diese treffen sich in O. Beschreibe um O mit OA den Kreis, welcher der gesuchte sein wird.

Bemerkung. Drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, bestimmen die Lage und die Grösse eines Kreises vollständig. Dieser Kreis heisst der dem △ ABC umbeschriebene; sein Radius wird mit r bezeichnet.

§ 59. Gleiche Sehnen.

1. Fällt man von dem Zentrum E — Fig. 45 — die Lote EF und EK auf die gleichen Sehnen AB und CD, zieht sodann EA, ED, so sind die △ EAF und EKD kongruent (4. Kongruenzsatz). Daher ist EF = EK. D. h.: Gleiche Sehnen haben gleiche Abstände vom Mittelpunkt des Kreises.

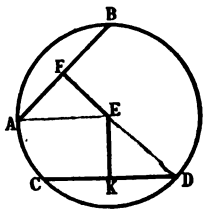


Fig. 45.

2. Durch welche Bewegung werden die genannten Dreiecke zur Deckung gebracht?

3. Wie lautet der Kehrsatz zu Nr. 1? Beweis!

4. Mit Berücksichtigung des § 56 findet man noch: Alle gleichen Sehnen eines Kreises berühren einen konzentrischen Kreis, dessen Radius der Abstand einer dieser Sehnen vom Zentrum ist.

§ 60. Die Tangente.

1. Der Radius zu dem Berührungspunkt steht auf der Tangente senkrecht.

2. Aus dem Umstande, dass — Fig. 46 — die Linie OA durch das Zentrum und den Berührungspunkt geht und zur Tangente senkrecht ist, ergiebt sich, dass folgende Geraden sich in eine vereinigen: a) Der Radius nach dem Berührungspunkt, b) das Lot vom Zentrum auf die Tangente, c) das Lot auf der Tangente im Berührungspunkt.

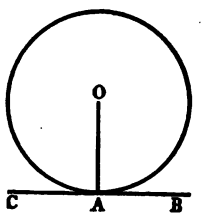


Fig. 46.

3. Der geometrische Ort des Mittelpunktes aller Kreise, welche die gegebene Gerade L

in dem gegebenen Punkte A berühren, ist das Lot auf L in A.

4. Der geometrische Ort des Zentrums aller Kreise von konstantem Radius ϱ, welche die gegebene Gerade L berühren, besteht aus den beiden Parallelen zu L im Abstande ϱ.

§ 61. Konstruktion der Tangente.

1. Aufgabe. An den gegebenen Kreis O die Tangente zu legen, wenn der Berührungspunkt A gegeben ist.

Konstruktion. — Fig. 46. — Ziehe OA und errichte in A auf OA das Lot BC; dieses ist die verlangte Tangente.

2. Aufgabe. Von dem ausserhalb des gegebenen Kreises O — Fig. 47 — liegenden Punkt A die Tangenten an denselben zu legen.

Konstruktion. Beschreibe um O einen Kreis, dessen Radius das Doppelte von dem des gegebenen Kreises ist. Sodann schlage aus A mit OA einen Kreisbogen, der den konzentrischen Kreis in D, E schneidet. Ziehe OD, OE. Diese Linien treffen den gegebenen Kreis in B, C. Verbinde A mit B und C, so hat man in diesen Geraden die verlangten Tangenten.

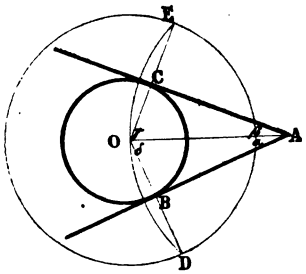


Fig. 47.

Beweis. Nach § 57, 1 ist AB $\perp$ OD, AC $\perp$ OE, alsdann muss AB und ebenso AC Tangente an dem gegebenen Kreis sein.

3. In Fig. 47 haben die Geraden AC und AB von O gleichen Abstand, mithin ist das ganze Gebilde symmetrisch für die Achse AO. Nach der Umklappung decken sich AC und AB, $\sphericalangle \beta$ und α, $\sphericalangle \gamma$ und δ gegenseitig. Daher ist $AC = AB$, $\sphericalangle \beta = \alpha$, $\sphericalangle \gamma = \delta$. D. h.: a) Die Abschnitte der von einem Punkte an einen Kreis gelegten Tangenten sind gleich lang; b) die Zentrale halbiert den Winkel zwischen beiden Tangenten und den zwischen den Berührungsradien.

4. Der geometrische Ort des Mittelpunktes aller Kreise, die zwei gegebene Geraden berühren, besteht aus den Halbierungslinien der Winkel dieser Geraden.

§ 62. Peripheriewinkel.

1. Der hohle Winkel, welcher von zwei sich auf der Peripherie schneidenden Sehnen gebildet wird, heisst Peripheriewinkel; er steht auf demjenigen Bogen, der zwischen seinen Schenkeln liegt.

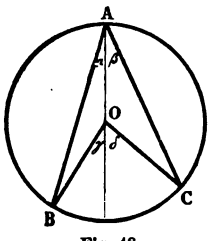


Fig. 48.

2. In Fig. 48 ist BAC ein Peripheriewinkel, BOC der zugehörige Zentriwinkel. Zieht man den Durchmesser AO, so ist $\sphericalangle \gamma = 2\,\alpha$ nach § 27, 3e und ebenso $\sphericalangle \delta = 2\,\beta$; daher $\sphericalangle \gamma + \delta = 2\,(\alpha + \beta)$ oder $\sphericalangle \frac{BOC}{2} = BAC$.

D. h.: Jeder Peripheriewinkel ist die Hälfte seines zugehörigen Zentriwinkels.

3. Zu allen Peripheriewinkeln, die auf dem Bogen BC stehen, gehört ein und derselbe Zentriwinkel. Daher ergiebt sich:

Alle Peripheriewinkel auf demselben Bogen oder auf gleichen Bögen sind einander gleich.

4. Der Peripheriewinkel, der auf einem Halbkreis steht, ist 1 R. (Satz des Thales.)

§ 63. Der Tangentenwinkel.

1. Die beiden hohlen Winkel zwischen einer Tangente und einer durch den Berührungspunkt gezogenen Sehne heissen Tangentenwinkel; jeder steht auf dem zwischen seinen Schenkeln liegenden Bogen. Bewegt sich — Fig. 48 — der Peripheriewinkel BAC so, dass A immer auf dem Umfang bleibt, und seine Schenkel stets durch B und C gehen, so kann er seine Grösse nicht verändern. Wenn hierbei schliesslich A dem C unbeschränkt nahe kommt, so erhält die verlängerte Sehne AC die Lage der Tangente in C und der Peripheriewinkel ist in den bei C gelegenen Tangentenwinkel übergegangen. Sonach lässt sich vermuten, dass der Tangentenwinkel C gleich dem Peripheriewinkel A ist. Dass diese Vermutung richtig ist, zeigt folgende Erörterung.

2. Es sei — Fig. 49 — CAB ein Tangenten- und ADC ein Peripheriewinkel, beide auf dem Bogen AC. Um ihre Gleichheit zu erweisen, nehme man den Peripheriewinkel zu Hilfe, dessen einer Schenkel Durchmesser ist, nämlich $\sphericalangle$ AEC, so ergiebt sich $\sphericalangle \gamma = \alpha$, da beide durch $\sphericalangle \beta$ zu 1 R ergänzt werden. Es ist aber $\sphericalangle \delta = \gamma$, mithin auch $\sphericalangle \delta = \alpha$. D.h.:

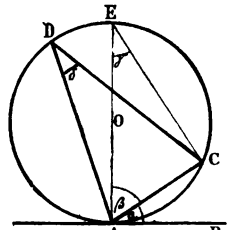


Fig. 49.

Jeder Tangentenwinkel ist so gross wie der mit ihm auf demselben Bogen stehende Peripheriewinkel.

§ 64. Geometrische Oerter.

1. Der geometrische Ort für die Spitze aller rechtwinkligen Dreiecke, die auf derselben Hypotenuse stehen, ist der Kreis über der Hypotenuse als Durchmesser.

2. Der geometrische Ort für die Spitze aller Dreiecke auf derselben Strecke BC als Seite und mit gleichem dieser Seite gegenüberliegenden Winkel α besteht aus zwei Kreisbögen über der Sehne BC, die je einen Winkel gleich α fassen. Beweis!

§ 65. Aufgabe.

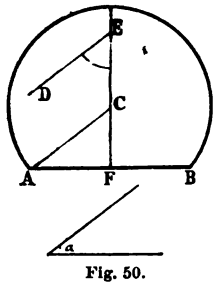


Fig. 50.

Ueber der Strecke AB (Fig. 50) als Sehne den Kreisbogen zu beschreiben, der einen Winkel gleich α fasst.

Konstruktion. Errichte auf AB das Mittellot. In dem Punkte E desselben lege $\sphericalangle DEF = \alpha$ an; ziehe AC ∥ DE. C ist der Mittelpunkt und CA der Radius des gesuchten Bogens.

§ 66. Das Sehnenviereck.

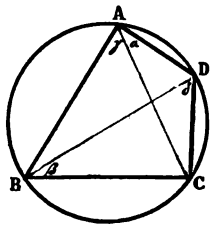


Fig. 51.

1. Ein Viereck, dessen Seiten Sehnen eines Kreises sind, wird Sehnenviereck genannt.

2. Um die Eigenschaften dieses Vierecks kennen zu lernen, ziehe man — Fig. 51 — AC, BD und beobachte, dass $\sphericalangle C + \beta + \delta = 2R$ ist. Es ist aber $\sphericalangle \alpha = \beta$, $\sphericalangle \gamma = \delta$, daher $\sphericalangle C + \alpha + \gamma = 2$ R oder $\sphericalangle C + A = 2$ R. D. h.:

In jedem Sehnenviereck ist die Summe zweier gegenüberliegender Winkel gleich 2 R.

3. Wie heisst der Kehrsatz und sein Beweis?

4. Um das Rechteck, das Quadrat, das gleichschenklige Trapez lässt sich ein Kreis beschreiben; nicht aber um den Rhombus, das Rhomboid und das ungleichschenklige Trapez.

§ 67. Das Tangentenviereck.

1. Ein Viereck, dessen Seiten Tangenten eines Kreises sind, heisst Tangentenviereck.

2. Weil das Tangentenviereck ein Viereck von besonderer Art ist, so muss es ausser den Eigenschaften des gemeinen Vierecks auch noch diejenigen haben, die daraus entspringen, dass seine Seiten Tangenten sind. Es ist (Fig. 52) Strecke $a = h$, $b = c$, $e = d$, $f = g$, nach § 61, 3; hieraus folgt $a + b + e + f = h + c + d + g$ oder $AB + CD = AD + CB$. In Worten:

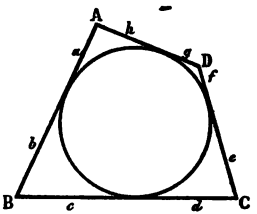


Fig. 52.

In jedem Tangentenviereck ist die Summe zweier Gegenseiten gleich der Summe der beiden anderen.

3. Wie heisst der Kehrsatz und sein Beweis?

4. Zusatz. In das Quadrat und den Rhombus lässt sich ein Kreis beschreiben; nicht aber in das Rechteck, das Rhomboid und das Trapez.

§ 68. Zwei Kreise.

1. Zwei Kreise mit gleichen Radien lassen sich dadurch zur Deckung bringen, dass man ihre Zentren zusammenfallen lässt. Daraus geht unter anderem auch

hervor, dass alle Sätze, die Beziehungen zwischen Strecken oder Winkeln eines Kreises enthalten, auch für Kreise mit gleichen Radien gelten.

2. Unter Zentrale versteht man sowohl die Gerade, welche beide Mittelpunkte verbindet, als auch nur die Strecke zwischen den Zentren.

3. Die Zentrale ist Symmetrieachse für beide Kreise.

Zwei Kreise können verschiedene Lagen zu einander haben:

4a. Die beiden Kreise mit den Zentren A, B und den Radien r, r′ liegen ganz aussereinander. Es ist $AB > r + r'$.

4b. Umgekehrt ist $r + r' < AB$, so liegen die beiden Kreise ganz aussereinander.

5a. Rückt der Mittelpunkt des einen Kreises gegen das Zentrum des anderen, so kann der Fall eintreten, dass sich die Kreise schneiden. Dies kann nur in zwei Punkten geschehen; denn haben die Kreise den Punkt C gemeinsam, so gehört auch derjenige Punkt beiden Kreisen an, der zu C hinsichtlich der Achse AB symmetrisch liegt. Die Zentrale AB ist kleiner als $r + r'$ und zugleich grösser als $r - r'$.

5b. Umgekehrt: Ist die Zentrale $AB < r + r'$ und zugleich $> r - r'$, so schneiden sich die Kreise.

6a. Zwischen den beiden soeben betrachteten Lagen giebt es eine von besonderer Wichtigkeit. Haben nämlich die beiden Kreise — Fig. 53, 54 — einen Punkt der Zentrale gemeinsam, den Punkt C, so entspricht sich dieser selbst bezüglich der Symmetrieachse AB; d. h. die beiden Kreise haben nur diesen einen Punkt gemeinsam. Errichtet man in C auf AB das Lot, so ist dieses gemeinschaftliche Tangente beider Kreise. Wenn aber zwei krumme Linien eine gemeinsame Tangente mit dem nämlichen Berührungspunkt haben, so

sagt man, die Linien berühren sich. Daher berühren sich im vorliegenden Falle die beiden Kreise. Die Zentrale AB ist $= r \pm r'$.

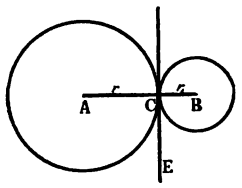


Fig. 53.

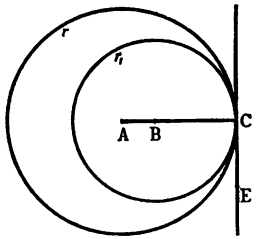


Fig. 54.

6b. Umgekehrt: Der Berührungspunkt zweier sich berührender Kreise liegt auf der Zentrale. Ist die Zentrale gleich der Summe oder Differenz der Radien, so berühren sich die Kreise von aussen bezw. innen.

7a. Liegt der eine Kreis ganz innerhalb des anderen, so ist die Zentrale $AB < r - r'$.

7b. Umgekehrt: Ist die Zentrale $AB < r - r'$, so schliesst der eine Kreis den andern ein.

§ 69. Geometrische Oerter.

1. Der geometrische Ort für den Mittelpunkt aller Kreise, welche den gegebenen Kreis A in dem gegebenen Punkt B berühren, ist die Gerade AB.

2. Der geometrische Ort für den Mittelpunkt aller Kreise vom gegebenen Radius ϱ, die den gegebenen Kreis vom Radius r berühren, besteht aus zwei zum gegebenen Kreise konzentrischen Kreisen vom Radius $r \pm \varrho$, oder auch $\varrho \pm r$, wenn $\varrho > r$ ist.

§ 70. Gemeinschaftliche Tangenten.

1. Aufgabe. Die beiden äusseren gemeinsamen Tangenten an zwei gegebene Kreise zu legen.

Konstruktion. Beschreibe um den Mittelpunkt B — Fig. 55 — des grösseren Kreises den konzentrischen, dessen Halbmesser dem Unterschiede der Radien der gegebenen Kreise gleichkommt. Lege von dem Zentrum A des anderen Kreises die Tangenten AC und AG an den konzentrischen Kreis B; ziehe BC und BG, deren Verlängerungen den Kreis B in D und H treffen. Alsdann ziehe AE ∥ BD und AF ∥ BH. Die Verbindungslinien DE und HF sind die verlangten Tangenten.

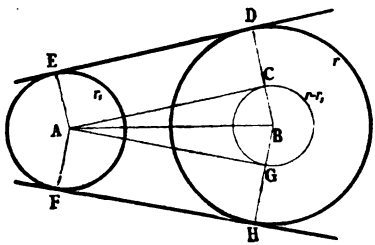


Fig. 55.

Beweis. Aus der Konstruktion folgt AE ∦ CD, weil ferner ∢ C = 1 R ist, so muss ACDE ein Rechteck sein; folglich ist ∢ D = 1 R, ∢ E = 1 R, somit ED gemeinsame Tangente.

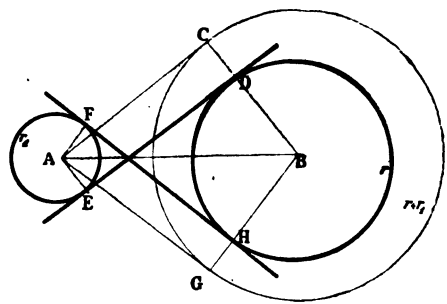


Fig. 56.

2. Aufgabe. Die beiden inneren gemeinsamen Tangenten an zwei gegebene Kreise zu legen.

Konstruktion. — Fig. 56. — Beschreibe um das Zentrum B des grösseren Kreises mit einem Radius gleich der Summe der Halbmesser der gegebenen Kreise den konzentrischen Kreis; lege von A, der Mitte des kleineren Kreises, die beiden Tangenten AC und AG an den konzentrischen Kreis B. Sodann verbinde den Punkt B mit den Berührungspunkten C und G, welche Linien den Kreis B in D und H schneiden. Ziehe AE entgegengesetzt parallel zu BC und AF entgegengesetzt parallel zu BG. Verbindet man F mit H und E mit D, so hat man die gesuchten Tangenten. — Beweis wie oben.

§ 71. Die Berührungskreise des Dreiecks.

1. Der Kreis, welcher die drei Seiten eines Dreiecks berührt, heisst der Inkreis. Sein Radius sei mit ϱ bezeichnet. Der Kreis, der eine Seite und die Verlängerungen der beiden anderen berührt, wird Ankreis genannt. Es giebt drei Ankreise, deren Radien seien mit ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c bezeichnet, je nachdem die Kreise die Seiten BC, AC, AB direkt d. h. nicht ihre Verlängerungen berühren.

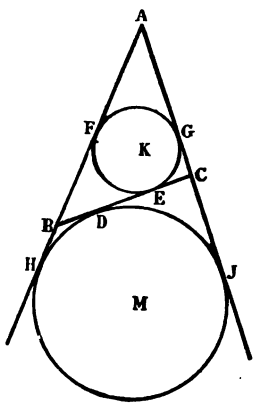


Fig. 57.

2. In Fig. 57 seien an die beiden Kreise K und M beide äussere und eine innere gemeinsame Tangente gelegt. Auf diese Weise entsteht $\triangle$ ABC, in welchem der Kreis K der Inkreis und M der der Seite BC anbeschriebene ist. Nun

ist nach § 61, 3 $AH = AJ$, ebenso $AF = AG$; mithin $FH = GJ$.

3. Weiter ist $BC = (BD + CD) = BH + CJ$, ebenso $BC = (BE + CE) = BF + CG$. Durch Addition erhält man $2\,BC = FH + GJ = 2\,FH = 2\,GJ$; daher $BC = FH = GJ$. D. h.:

Jede Dreieckseite ist so lang wie die Strecke auf jeder der beiden anderen Seiten, die zwischen den Berührungspunkten des In- und Ankreises liegt.

4. Da nun $GJ = BC$ und $CG = CE$ ist, so folgt $CJ = BE$; aber es ist $CJ = CD$, daher $BE = CD$, und nach Wegnahme des gemeinsamen Stückes DE verbleibt $BD = CE$.

5. Bezeichnet man den Umfang eines Dreiecks, $a + b + c$, mit 2 s, so lässt sich zeigen, dass $AH = AJ = s$ ist. Denn man hat $AH = AB + HB = AB + BD$ und ebenso $AJ = AC + CD$. Mithin $2\,AH = 2\,AJ = AB + AC + BC = a + b + c$; daher $AH = AJ = s$. In Nr. 3 wurde gefunden $HF = BC$; aber $AF = AH - HF$, somit $AF = s - a$. Analog erhält man $BF = s - b$, $CG = s - c$.

§ 72. Uebungen.

Bezeichnung. $\odot$ aus A, L, A auf L, K, A auf K, ϱ bedeutet: einen Kreis zu beschreiben, der durch A geht, L berührt, L in A berührt, den Kreis K berührt, den Kreis K in A berührt, den Radius ϱ hat.

1. Die Bögen zwischen zwei parallelen Sehnen sind gleich. Umkehrung!

2. Zwei zu einander senkrechte Sehnen zerlegen den Umfang in 4 Bögen; je zwei gegenüberliegende machen zusammen einen Halbkreis aus.

3. Die beiden Strecken einer Sekante, welche diese zwischen zwei konzentrische Kreise legt, sind einander gleich.

4. Die grössere von zwei Sehnen hat vom Zentrum die kleinere Entfernung.

5. Wie heisst der Kehrsatz zu Nr. 4 und sein Beweis?

6. Schneiden sich zwei Sehnen eines Kreises, so ist einer von ihnen gebildete Winkel gleich der Summe der zwei Peripheriewinkel, die auf den zu ihm und seinem Scheitelwinkel gehörigen Bögen stehen.

7. Wie heisst der Satz für den Fall, dass sich die Sehnen ausserhalb des Kreises schneiden?

8. Ist ein Winkel, dessen Schenkel durch die Endpunkte eines Bogens gehen, gleich dem Peripheriewinkel, der über diesem Bogen auf derselben Seite steht, so muss seine Spitze auf dem Umfang des Kreises liegen.

9. Ueber der gemeinsamen Tangente zweier sich von aussen berührender Kreise als Durchmesser ist der Kreis gezeichnet. Es ist darzuthun, dass dieser Kreis die Zentrale im gemeinsamen Berührungspunkte tangiert.

10. Ist in einem Dreieck $t_a = {}^1/_2\, a$, so ist es in A rechtwinklig.

11. Wenn in einem Dreieck $b > c$ ist, so ist der Winkel zwischen dem Radius des Umkreises nach A und der Mediane des $\sphericalangle A = {}^1/_2\ (\beta - \gamma)$.

12. Im rechtwinkligen Dreieck ist $\varrho = {}^1/_2\,(b + c - a)$; ferner ist $\varrho_a = {}^1/_2\,(a + b + c)$.

13. Die Diagonalen zerlegen ein Viereck in vier Dreiecke. Die vier Zentren der Umkreise dieser Dreiecke sind die Ecken eines Parallelogramms.

14. In dem $\triangle$ ABC geht ein Kreisbogen durch A, C und berührt AB, ein zweiter durch A, B und berührt BC, ein dritter durch B, C und berührt AC. Es ist zu beweisen, dass sich die drei Bögen in einem Punkte schneiden.

15. Die Höhen eines Dreiecks sind die Medianen desjenigen Dreiecks, dessen Ecken die Fusspunkte der Höhen sind.

16. Die Medianen der Winkel eines Vierecks bilden ein Kreisviereck.

17. Beschreibt man über den Seiten eines Dreiecks nach aussen gleichseitige Dreiecke und legt man um diese drei Dreiecke die Umkreise, so schneiden sich diese in einem Punkte. Weitere Eigenschaften dieser Figur sind anzuführen.

18. Schneidet man von einem Dreieck, dem ein Kreis einbeschrieben ist, durch Tangenten an diesen Kreis drei kleinere Dreiecke an den Ecken ab, so ist die Summe der Umfänge dieser Dreiecke gleich dem Umfang des gegebenen Dreiecks.

19. Man zeichne um das $\triangle ABC$ den Umkreis und bestimme den Mittelpunkt M des Inkreises; ferner verlängere man die Gerade AM bis zu ihrem Schnitt D mit dem Umkreis. Beweise, dass $DB = DM = DC$ ist.

20. Zieht man durch die Eckpunkte eines einem Kreise einbeschriebenen Rechtecks Tangenten, so schliessen diese einen Rhombus ein.

21. Die Fusspunkte der drei Lote, die man von irgend einem Punkt der Peripherie des Umkreises eines Dreiecks auf die Seiten desselben fällt, liegen auf einer Geraden. (Benütze Kreisvierecke zum Beweis!)

22. Bestimme die Länge der Strecke DE in Fig. 57.

23. $\odot$ aus A, B, dessen Zentrum auf L liegt.

24. Durch den Punkt A innerhalb eines Kreises eine Sehne zu ziehen, dass sie in ihm halbiert wird.

25. An einen Kreis die Tangenten parallel L zu legen.

26. $\odot$ aus $L \parallel L'$, A.

27. $\odot$ aus A, B auf L.

28. $\odot$ aus L, A, ϱ. 29. $\odot$ aus L, L', ϱ.

30. Ueber AB den Kreisbogen zu zeichnen, der einen Winkel $= \alpha$ fasst. Mit Hilfe des Satzes vom Tangentenwinkel.

31. $\triangle$ aus a, h_a, α; 32. $\triangle$ aus $a + b$, r, α.

33. Rechtwinkliges $\triangle$ aus a, h_a.

34. $\triangle$ aus u, v, α.

35. $\triangle$ aus p, q, α.

36. Parallelogramm aus e, f, α.

37. $\triangle$ aus a, t_a, α.

38. Viereck aus a, b, β, $\sphericalangle$ fd, $\sphericalangle$ fc; 39. Viereck aus a, b, β, f, δ; 40. Viereck aus a, b, d, α, γ.

41. Kreisviereck aus b, c, d, r. 42. Ebenso aus a, b, e, c.

43. Tangentenviereck aus b, β, γ, c. 44. Ebenso aus b, β, γ, f. 45. Ebenso aus a, b, c, β.

46. In einen Sektor den Inkreis zu beschreiben.

47. Zwischen die Katheten des rechtwinkligen Dreiecks ABC die Strecke XY = s so zu legen, dass sie von der Hypotenuse halbiert werde.

48. $\odot$ aus A auf K, ϱ; 49. $\odot$ aus K, L, ϱ; 50. $\odot$ aus K, K', ϱ; 51. $\odot$ aus K, A, ϱ; 52. $\odot$ aus A auf K, B.

53. Eine Linie zu finden, die den gegebenen Kreis K berührt und in den gegebenen Kreis K' eine Sehne = s legt.

54. $\triangle$ aus a, ϱ, α; 55. $\triangle$ aus a, ϱ, ϱ_a; 56. $\triangle$ aus α, a, ϱ_a.

57. $\triangle$ aus 2 s, α, ϱ; 58. $\triangle$ aus 2 s, α, a.

59. Um die drei Ecken eines Dreiecks Kreise zu beschreiben, von denen sich je zwei berühren.

60. Durch den einen Schnittpunkt zweier Kreise eine Sekante zu legen, so dass die in die Kreise fallenden Sehnen gleich werden.

61. Desgleichen, so dass die zu den Sehnen gehörigen Zentriwinkel gleich werden.

62. Desgleichen, so dass die Summe beider Sehnen gleich s werde.

63. Durch den Schnittpunkt A der beiden Kreise K und K' eine Sehne in K so zu ziehen, dass sie von der Peripherie des Kreises K' halbiert werde.

64. Gegeben sind die Punkte A, B und C. Durch A eine Gerade zu ziehen, dass die von B und C auf sie gefällten Lote eine gegebene Summe haben.

65. Desgleichen eine gegebene Differenz.

66. Man soll drei Kreise konstruieren, die sich gegenseitig in den Punkten A, B und C berühren.

67. In dem $\triangle$ ABC die Strecke XY $\parallel$ BC so zu ziehen, dass XY + BC = BX + CY werde.

9. Kapitel.

Regelmässige Vielecke.

§ 73. Eigenschaften.

1. In den früheren Paragraphen war unter anderem die Rede vom gleichseitigen Dreieck, vom Quadrat, d. h. von Figuren mit gleichen Seiten und gleichen Winkeln. Die Erfahrung lehrt, dass es auch Fünfecke, Sechsecke etc. von gleicher Eigenschaft giebt.

2. Ein Vieleck heisst regelmässig, regulär, wenn es gleiche Seiten und gleiche Winkel hat.

3. Jedes reguläre Polygon ist axial symmetrisch sowohl für die Mediane eines Winkels, als auch für das Mittellot einer Seite.

4. Wird — Fig. 58 — die Mediane AA′ des ∢ A zur Symmetrale gewählt, so sind die Winkelhalbierenden BB′, FF′ benachbarter Winkel homologe Geraden, sie müssen sich somit auf AA′ schneiden, oder diese drei Medianen treffen sich in dem Punkte O. Aus demselben Grunde vereinigen sich CC′, BB′, AA′ in O, wenn man BB′ zur Symmetrale macht. Da ferner auch das Mittellot GG′ zur Achse der Symmetrie genommen werden kann, und sich alsdann die Medianen AA′, BB′ entsprechen, so wird deren Schnittpunkt auf dem Mittellot liegen, oder das Mittellot geht durch O. Das Gleiche lässt sich von den Mittelsenkrechten der anderen Seiten darthun. Daher:

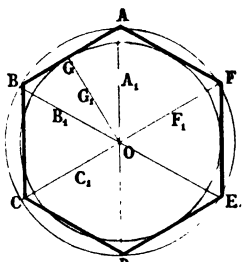


Fig. 58.

In jedem regelmässigen Vieleck schneiden sich die Medianen der Winkel und die Mittelsenkrechten der Seiten in demselben Punkt.

5. Nimmt man dies Ergebnis zusammen mit den Eigenschaften des Mittellotes und der Winkelhalbierenden, so ergiebt sich, dass der Schnittpunkt O sowohl von den Ecken, als auch von den Seiten des Vielecks gleichweit entfernt ist. D. h.:

Jedes reguläre Polygon lässt einen Umkreis und einen Inkreis zu; beide Kreise sind konzentrisch.

6. Die Winkelhalbierenden AO, BO etc. teilen den vollen Winkel bei O in n gleiche Teile, wenn das Vieleck n Seiten hat; daher ist jeder Zentriwinkel $= \frac{4}{n}$ R.

§ 74. Kehrsätze.

1. Teilt man die Peripherie eines Kreises in n gleiche Teile und verbindet je zwei Nachbarpunkte durch Sehnen, so lässt sich beweisen, dass das so entstandene Vieleck regelmässig ist: Die Seiten sind einander gleich, weil sie zu gleichen Bögen gehören, und die Winkel sind einander gleich, da jeder ein Peripheriewinkel auf (n — 2): n tel des Umfanges ist.

2. In analoger Weise zeigt man die Richtigkeit des folgenden Satzes: Teilt man den Umfang eines Kreises in n gleiche Teile, und legt man in den Teilpunkten an den Kreis die Tangenten, so bilden dieselben ein reguläres Vieleck.

§ 75. Konstruktion zweier Reihen regulärer Polygone.

1. Zieht man in einem Kreise zwei zu einander senkrechte Durchmesser, so sind deren Endpunkte die Ecken des regelmässigen Vierecks. Durch Halbieren

der Bögen kommt man auf das Achteck, von hier aus auf das Sechzehneck u. s. w.

2. Da der Zentriwinkel des regulären Sechsecks gleich 60^0 ist, so folgt, dass eine Seite dieses Vielecks gleich dem Radius des Umkreises ist. Halbiert man die zu den Seiten des Sechsecks gehörigen Bögen, so tritt das regelmässige Zwölfeck und in gleicher Weise das Vierundzwanzigeck u. s. w. auf.

§ 76. Uebungen.

1. In jedem regulären n-Eck ist ein Winkel $= \frac{2n-4}{n}$ R.

2. In jedem regelmässigen Vieleck von gerader Seitenzahl sind je zwei Gegenseiten parallel.

3. Trägt man auf den Seiten AB, BC und CA eines gleichseitigen Dreiecks die Stücke $AD = BE = CF = {}^1/_3 AB$ ab und verbindet man die Punkte D, E und F mit einander, so ist $\triangle DEF$ gleichseitig und seine Seiten stehen auf denen des $\triangle ABC$ senkrecht.

4. Im gleichseitigen Dreieck ist $\varrho = {}^1/_3 h$.

5. Ueber AB als Seite das regelmässige Sechseck zu konstruieren.

6. Ein gleichseitiges Dreieck so abzustumpfen, dass ein regelmässiges Sechseck übrig bleibt.

7. Ein Achteck zu konstruieren, das mit einem gegebenen Quadrat gleichen Umfang hat.

8. In einen Kreis drei gleiche Kreise zu beschreiben, von denen jeder die beiden anderen und den gegebenen Kreis berührt.

9. Durch die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks drei Linien zu ziehen, welche ein gleichseitiges Dreieck von der Seite s bilden.

10. Drehe ein Quadrat um seinen Mittelpunkt um 45^0 und untersuche die Figur, welche aus beiden Quadraten gebildet wird.

11. Drehe ein gleichseitiges Dreieck um 2 R, und untersuche die Figur, die durch die beiden Dreiecke hervorgerufen wird.

12. Die Diagonalen eines regulären Fünfecks bilden wieder ein regelmässiges Fünfeck.

Bemerkung. Verlängert man alle Seiten eines regelmässigen Fünfecks bis zum Schnitt, so entsteht der Drudenfuss, das Pentagramm, welches im Mittelalter als Zauber gegen Elementargeister angewendet wurde.

---

10. Kapitel.

Die Gleichheit der Inhalte.

a. Vergleichung der Inhalte.

§ 77. Einführung.

Während in den vorangegangenen Kapiteln Winkel, Strecken, Linien der Figuren betrachtet worden sind, soll jetzt der Inhalt derselben einer Untersuchung unterworfen werden.

1. Zwei Figuren heissen gleich, wenn sie gleichen Flächeninhalt haben.

2. Zusatz. Kongruente und symmetrische Figuren sind einander gleich.

3. Jede Seite eines Dreiecks heisst Grundseite. Im Parallelogramm, Trapez werden zwei parallele Gegenseiten Grundseiten genannt, und der Abstand beider heisst die zugehörige Höhe.

4. Haben zwei Dreiecke, Parallelogramme, Trapeze gleiche Höhe, so lassen sie sich zwischen zwei Parallelen legen, deren Abstand jener Höhe gleichkommt, und umgekehrt: Liegen diese Figuren zwischen zwei Parallelen, so haben sie gleiche Höhe.

5. Im spitzwinkligen Dreieck liegen sämtliche Höhen innerhalb des Dreiecks, im rechtwinkligen Dreieck fallen zwei derselben mit den Katheten zusammen und im stumpfwinkligen Dreieck liegen die beiden Höhen ausserhalb des Dreiecks, welche auf die den stumpfen Winkel einschliessenden Seiten gefällt sind. — Im Rhombus und im Quadrat sind die beiden Höhen einander gleich. — Im gleichschenkligen Dreieck sind die Höhen auf die Schenkel und im gleichseitigen Dreieck sind alle drei Höhen einander gleich.

§ 78. Die Gleichheit der Parallelogramme und Dreiecke.

1. Bei der Vergleichung der Inhalte geradliniger Figuren geht man am besten von Parallelogrammen aus. Man wählt zunächst zur Untersuchung zwei Parallelogramme von gleicher Grundseite und gleicher zugehöriger Höhe. Diese beiden Figuren lassen sich zwischen zwei Parallelen legen, wodurch Fig. 59 erhalten wird.

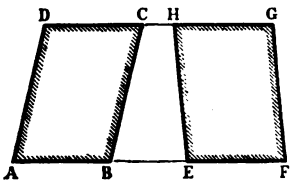


Fig. 59.

Da $EF = AB$ ist, so deckt das Trapez $AEHD$ nach einer Verschiebung um AB längs AF die Figur $BFGC$. Beide Trapeze sind daher gleich. Nach Wegnahme des gemeinsamen Trapezes $BEHC$ bleibt $ABCD = EFGH$. D. h.:

Zwei Parallelogramme von gleicher Grundseite und gleicher Höhe sind gleich.

2. Jedes Parallelogramm ist für den Schnittpunkt seiner Diagonalen zentrisch symmetrisch. Daraus folgt, dass die beiden Dreiecke, in die es durch eine Diagonale zerlegt wird, gleich sind, oder jedes Dreieck ist die

Hälfte des Parallelogramms. Ein solches Dreieck hat gleiche Grundseite und gleiche Höhe mit dem Parallelogramm, und weil letzteres durch irgend ein anderes von gleicher Grundseite und Höhe ersetzt werden darf, so erhält man den Satz:

Ein Dreieck ist die Hälfte eines Parallelogramms von gleicher Grundseite und Höhe.

3. Folgerung. Zwei Dreiecke von gleicher Grundseite und Höhe sind einander gleich.

4. Gleiche Parallelogramme von gleicher Grundseite haben gleiche Höhe, von gleicher Höhe gleiche Grundseite. Führe den entsprechenden Lehrsatz für das Dreieck an und beweise beide Sätze!

§ 79. Geometrischer Ort.

Der geometrische Ort der Spitze aller gleichen Dreiecke auf gemeinsamer Grundseite besteht aus zwei Parallelen zur Grundseite.

§ 80. Die Pythagoreischen Sätze.

1. Es seien — Fig. 60 — a, b, c die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks ABC, h die Höhe auf die Hypotenuse, p, q die dadurch entstandenen Abschnitte auf letzterer — sie werden die Projektionen von b, c auf BC genannt —; ferner werde der Inhalt eines Quadrats von der Seite s mit s^2, der Inhalt eines Rechtecks von den anstossenden Seiten f, g mit f.g bezeichnet. (Dass dies statthaft ist, wird in § 106 gezeigt werden.)

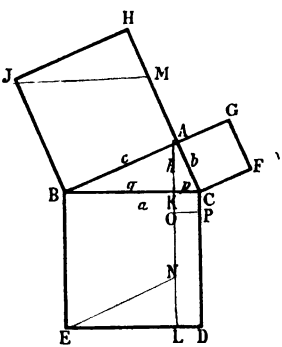


Fig. 60.

2. Die wichtigsten Inhaltsbeziehungen werden am rechtwinkligen Dreieck erhalten. Diese sind $b^2 = a.p$; $c^2 = a.q$; $b^2 + c^2 = a^2$; $h^2 = p.q$. Die Richtigkeit derselben wird wie folgt bewiesen:

3. Errichte auf den Seiten des rechtwinkligen Dreiecks ABC die Quadrate BCDE, ABJH, ACFG; zerlege ferner das erstere Quadrat durch das Lot AL zu BC in die beiden Rechtecke BKLE, CKLD. Zieht man noch EN ∥ BA und JM ∥ BC, so ist Parallelogramm BENA = BJMC, weil sich beide nach einer Drehung um B um 90° decken. Aber Parallelogramm BENA = Rechteck BKLE und Parallelogramm BJMC = Quadrat BJHA. Daher ist auch Rechteck BKLE = Quadrat BJHA oder $c^2 = a.q$. Ebenso beweist man $b^2 = a.p$. In Worten:

Das Quadrat über einer Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und der Projektion dieser Kathete auf die Hypotenuse. (Satz des Euklides.)

Addiert man die beiden soeben erhaltenen Resultate, so kommt $a^2 = b^2 + c^2$. D. h.:

Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den Katheten. (Satz des Pythagoras.)

4. Macht man nun KO = KC und zieht OP ∥ BC, so ist KCPO das Quadrat über p; auch ist OL = q. Nach Nr. 3 ist aber $b^2 = h^2 + p^2$ und $b^2 = a.p = p^2 + p.q$, weil KCDL = KCPO + OPDL ist; folglich ist $h^2 = p.q$. D. h.:

In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Höhe gleich dem Rechteck aus den Abschnitten der Hypotenuse. (Höhensatz.)

5. Bemerkung. Um zu beweisen, dass eine Grösse gleich der Summe zweier anderen ist, zerlegt man

häufig diese eine Grösse in zwei Teile, die den beiden kleineren Grössen einzeln verglichen gleich sind. Dieses Verfahren rechtfertigt hier die Hilfslinie AL. Die beiden anderen Hilfslinien JM und EN führen auf kongruente Figuren.

6. Ist in einem Dreieck das Quadrat der grössten Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten, so ist das Dreieck rechtwinklig. Beweis!

7. Der oben unter Nr. 3 bewiesene Satz wird nach Pythagoras aus Samos (im 6. Jahrh. v. Chr.) der Pythagoreische genannt. Die Thatsache, dass drei Strecken von 3, 4, 5 Längeneinheiten die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks sind, ist schon sehr frühe gefunden worden. Sehr wahrscheinlich hatten die alten Aegypter und Babylonier Kenntnis davon. Auch Pythagoras musste um diesen Satz wissen. Dazu entdeckte er, dass $3^2+4^2=5^2$ ist. Aus der Verbindung dieser beiden Richtigkeiten entsprang der berühmte Lehrsatz, zunächst jedoch nur für das Dreieck, dessen Seiten 3, 4, 5 Einheiten lang sind. Pythagoras hat ihn dann sicherlich auch für das gleichschenklig rechtwinklige Dreieck als richtig erwiesen. Der heute noch gebräuchlichste Beweis stammt von dem alexandrinischen Mathematiker Euklides (300 v. Chr.) her. Er stützt sich auf die Kongruenz der Dreiecke JBC und ABE. Pythagoras löste auch die Aufgabe: Drei Zahlen a, b, c von der Beschaffenheit zu finden, dass $a^2=b^2+c^2$ werde. Er fand, wenn n eine ganze Zahl ist, für $a=2n^2+2n+1$, $b=2n^2+2n$, $c=2n+1$. In der That ist $n=1$, so ist $a=5$, $b=4$, $c=3$; ist $n=2$, so kommt $a=13$, $b=12$, $c=5$ u. s. w.

§ 81. Anwendung auf das schiefwinklige Dreieck.

1. Es sei — Fig. 61 — ABC ein bei C spitzwinkliges Dreieck, $AE \perp BC$. Nach § 80 ist nun $c^2=(a-p)^2+h^2=a^2+p^2-2ap+h^2=a^2+b^2-2ap$, weil $h^2+p^2=b^2$ ist.

2. Ist dagegen — Fig. 62 — ABC ein bei C stumpfwinkliges Dreieck, und ist auch hier AE ⊥ BC, so erhält man $c^2=(a+p)^2+h^2=a^2+p^2+2ap+h^2=a^2+b^2+2ap$.

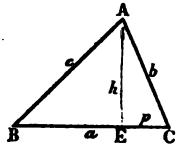


Fig. 61.

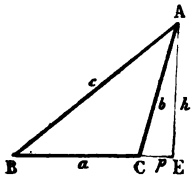


Fig. 62.

Beide Sätze lauten in Worten: Im stumpfwinkligen Dreieck ist das Quadrat der grössten Seite grösser als die Summe der Quadrate der beiden andern Seiten um das doppelte Rechteck aus der einen dieser Seiten und der Projektion der andern auf sie; in jedem Dreieck ist das Quadrat einer Seite, die einem spitzen Winkel gegenüberliegt, um eben so viel kleiner.

b. Verwandlung der Figuren.

§ 82. Aufgaben.

1. Eine Figur verwandeln heisst sie unter Erhaltung ihres Flächeninhalts so umgestalten, dass sie gewissen gegebenen Bedingungen genügt. Somit lässt sich jede Aufgabe über Verwandlung auch in der Fassung geben: Eine Figur zu konstruieren, von welcher neben andern Stücken der Inhalt gegeben ist.

2. Das gegebene Dreieck ABC in ein anderes mit der gemeinsamen Grundseite BC zu verwandeln, von dem noch die Nebenseite c gegeben ist.

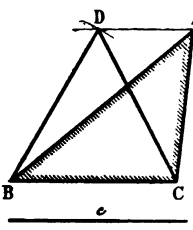


Fig. 63.

Konstruktion. — Fig. 63 — Ziehe durch A die Parallele zu BC, welche den um B mit c beschriebenen Kreisbogen in D schneidet. Verbinde D mit B und C. △ BCD ist das verlangte.

3. Das gegebene Parallelogramm ABCD in ein anderes mit der gemeinsamen Grundseite BC zu verwandeln, von dem noch $\sphericalangle \beta$ gegeben ist.

Konstruktion. — Fig. 64. — Lege an BC in B den $\sphericalangle$ CBM $= \beta$ an. Der Schenkel BM schneidet AD in F. Ziehe CE ∥ BF. BCEF ist das verlangte Parallelogramm.

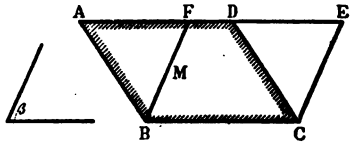


Fig. 64.

Bemerkung. Verwandle ein gegebenes Parallelogramm in ein Rechteck.

4. Ein gegebenes Dreieck in ein Parallelogramm unter Beibehaltung a) einer Seite, b) einer Höhe zu verwandeln.

a) Konstruiere über der beibehaltenen Seite ein Parallelogramm, dessen Höhe die Hälfte derjenigen Dreieckshöhe ist, die zu jener Seite gehört.

b) Konstruiere ein Parallelogramm, dessen Höhe gleich der gegebenen Dreieckshöhe ist, und dessen zugehörige Grundseite die Hälfte derjenigen Dreiecksseite ist, die zu jener Höhe gehört.

Bemerkung. Verwandle ein gegebenes Dreieck in ein Rechteck.

5. Ein Vieleck in ein anderes zu verwandeln, das eine Ecke weniger als das gegebene hat.

Konstruktion. Gegeben ist das Fünfeck ABCDE. Wenn die Ecke D verschwinden soll, so ziehe AD und durch E die Parallele zu AD, welche die verlängerte CD in F schneidet. Verbinde A mit F. Es ist ABCF das verlangte Viereck.

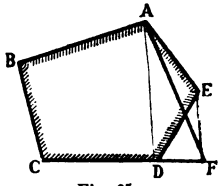


Fig. 65.

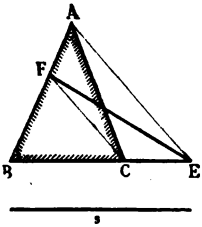


Fig. 66.

Beweis. Nach § 78, 3 ist $\triangle$ ADF = ADE. Zählt man zu beiden Dreiecken das Viereck ABCD hinzu, so ergiebt sich ABCF = ABCDE.

Bemerkung. Verwandle ein gegebenes Fünfeck in ein Dreieck.

6. Das gegebene Dreieck ABC in ein anderes zu verwandeln, so dass $\sphericalangle$ B bleibt und die eine der einschliessenden Seiten, BC, die gegebene Grösse s erhält.

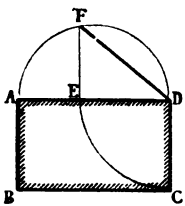


Fig. 67.

Konstruktion. Auf dem Strahl BC trage BE = s ab. Ziehe AE und durch C die Parallele zu EA, welche die Seite AB in F schneidet. Verbinde F mit E, so ist BFE das gewünschte Dreieck.

Beweis. Es ist $\triangle$ BCF = BCF; ferner $\triangle$ FCE = FCA (§ 78, 3), addiert: $\triangle$ BFE = ABC. Ausserdem ist BE = s und $\sphericalangle$ B geblieben.

Bemerkung. Beobachte, wie sich die Höhe h_a mit der Länge der BC ändert. — Verwandle das Dreieck ABC in ein anderes, so dass der $\sphericalangle$ B bleibt und die Höhe $h_a = s$ wird.

7. Das gegebene Rechteck ABCD in ein Quadrat zu verwandeln.

Konstruktion. a) Mit dem Eukl. Satze. Fig. 67. Trage auf DA die Strecke DE = DC ab; beschreibe über AD als Durchmesser den Halbkreis, errichte auf AD in E das Lot, welches den Halbkreis in F schneidet; ziehe DF, so ist diese Strecke die Seite des gesuchten Quadrates.

b) Mit dem Höhensatze. Fig. 68. Verlängere AD bis E um DC, konstruiere über AE als Durchmesser den Halbkreis; dieser wird von der verlängerten CD in F geschnitten. Es ist DF die Seite des gesuchten Quadrates.

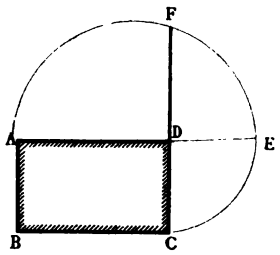


Fig. 68.

8. Ein Vieleck in ein Quadrat zu verwandeln.

Konstruktion. Verwandle das Polygon mit Hilfe von Nr. 5 in ein Dreieck, dieses mittelst Nr. 4 in ein Rechteck und letzteres nach Nr. 7 in das gesuchte Quadrat.

9. Ein Quadrat zu konstruieren, das gleich der Summe oder der Differenz zweier gegebenen Quadrate a^2, b^2 ist.

Konstruktion. Im ersten Falle stelle man ein rechtwinkliges Dreieck her, dessen Katheten gleich a, b sind. Die Hypotenuse ist die Seite des gewünschten Quadrates. Im anderen Falle wird die grössere gegebene Quadratseite zur Hypotenuse, die kleinere zu einer Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks gewählt. Die andere Kathete ist die Seite des gesuchten Quadrats.

10. Ein Quadrat zu konstruieren, das doppelt, viermal so gross ist als ein gegebenes Quadrat.

c. Teilung der Figuren.

§ 83. Aufgaben.

1. Ein gegebenes Dreieck von einer Ecke aus in n gleiche Teile zu teilen.

Konstruktion. Teile die Gegenseite der gegebenen Ecke in n gleiche Teile und verbinde die Teilpunkte mit der Ecke.

2. Ein gegebenes Trapez in n gleiche Teile zu zerlegen.

Konstruktion. Teile die Mittellinie in n gleiche Teile; ziehe durch die Teilpunkte Linien, welche die Grundseiten schneiden, einander aber innerhalb der Figur nicht treffen.

Beweis. Jedes der erhaltenen Trapeze ist gleich einem Parallelogramm, dessen Höhe gleich der Höhe des Trapezes, und dessen Grundseite gleich 1/n tel der Mittellinie ist.

3. Das gegebene $\triangle$ ABC von dem auf der Seite AB gelegenen Punkte E aus zu halbieren. — Fig. 69. —

1. Konstruktion. Halbiere BC in F; verwandle $\triangle$ ABF in das $\triangle$ BEK, so dass die Seite BA durch BE ersetzt wird; dann ist EK die gesuchte Teilungslinie.

2. Konstruktion. Verwandle $\triangle$ ABC in das $\triangle$ BEL, so dass E die Spitze wird. Ziehe nämlich EC, sodann durch A die Parallele zu EC, welche die verlängerte BC in L trifft, verbinde E mit L. Halbiere BL in K. Die Linie EK halbiert das gegebene Dreieck.

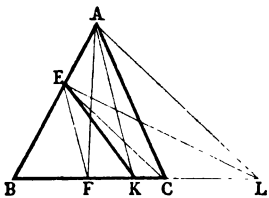


Fig. 69.

Bemerkung. Solche Teilungsaufgaben lassen sich im allgemeinen in doppelter Weise lösen: Endweder durch vorhergehende Teilung und nachfolgende Verwandlung, oder umgekehrt.

4. Ein Quadrat zu zeichnen, das die Hälfte eines gegebenen Quadrats ist.

§ 84. Uebungen.

1. Jede durch den Schnittpunkt der Diagonalen eines Parallelogramms gehende Gerade halbiert dasselbe.

2. Zieht man durch die Mitte der Nebenseite eines Trapezes die Parallele mit der anderen Nebenseite, so entsteht ein Parallelogramm, das gleich dem Trapez ist.

3. Die Mittellinie eines Dreiecks schneidet von diesem ein Dreieck ab, dessen Inhalt $^1/_4$ von dem des gegebenen ist.

4. Die Mitten der vier Seiten eines Vierecks sind die Ecken eines Parallelogramms, das die Hälfte des Vierecks ist.

5. Zieht man durch einen Punkt einer Diagonale eines Parallelogramms die Parallelen zu den Seiten, so sind diejenigen entstandenen Parallelogramme gleich, durch welche die Diagonale nicht geht.

6. Die Linien JC und AE der Fig. 60 stehen senkrecht aufeinander.

7. Sind a, b zwei Strecken, so ist $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

8. Desgleichen $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$.

9. Desgleichen $(a+b).(a-b) = a^2 - b^2$.

10. In Fig. 70 ist ABC ein Dreieck, in dem ACDE und ABGF Parallelogramme über den Seiten AC und AB sind. Es wird GF und DE bis zum Schnitt in H verlängert, alsdann HA gezogen und damit die Parallelen BJ und CK; verbinde J mit K. Es ist zu beweisen, dass BCKJ ein Parallelogramm und $BCKJ = ACDE + ABGF$ ist. (Satz des Pappus.)

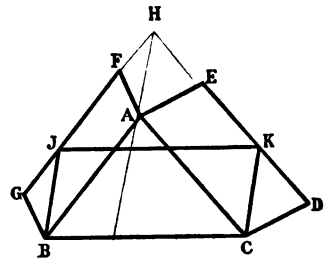


Fig. 70.

11. Den Pythagoreischen Lehrsatz mittelst des Satzes Nr. 10 zu beweisen.

12. In Fig. 71 ist O die Mitte des grösseren Kathetenquadrates, auch ist $GH \perp CB$, $EF \parallel CB$ gezogen. Weiter wird die Figur, wie die Zeichnung zeigt, zerlegt. Es ist durch diese Zerlegung der Pythagoreische Lehrsatz zu beweisen.

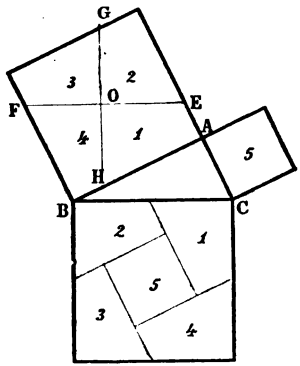


Fig. 71.

13. In jedem Parallelogramm ist $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2$.

14. In jedem Dreieck ist $4\,t_a^2 + a^2 = 2\,b^2 + 2\,c^2$.

15. In jedem Dreieck ist $4\,(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2) = 3\,.\,(a^2 + b^2 + c^2)$.

16. Stehen in einem Viereck die Diagonalen senkrecht aufeinander, so ist $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.

17. Fällt man von einem Punkte innerhalb eines Dreiecks auf die Seiten die Lote, welche diese in zwei Abschnitte zerlegen, so sind die beiden Summen aus den Quadraten je dreier nicht zusammenstossender Abschnitte einander gleich.

18. Ist in einem Viereck g die Verbindungsstrecke der Mitten der Diagonalen, so ist $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4\,g^2$.

19. Welchen Satz erhält man, wenn ein gegebenes Dreieck bei gegebener Richtlinie um eine gegebene Strecke verschoben wird?

20. Ziehe in einem regulären Sechseck von einer Ecke aus die Diagonalen und vergleiche die entstandenen Dreiecke nach ihrem Inhalt miteinander.

21. Das $\triangle$ ABC in ein anderes zu verwandeln, so dass BC bleibt, und $\sphericalangle$ ABC $= \varphi$ wird.

22. Das $\triangle$ ABC in ein gleichschenkliges mit der Basis BC zu verwandeln.

23. Das $\angle$ ABC in ein anderes zu verwandeln, so dass BC $=$ s und $\sphericalangle$ ABC $= \varphi$ wird.

24. Das $\triangle$ ABC in ein anderes zu verwandeln, so dass BC $=$ s und $\sphericalangle$ BAC $= \varphi$ wird.

25. Das Parallelogramm ABCD in ein anderes zu verwandeln, so dass BC $=$ s und AB $=$ t werde.

26. Ein Parallelogramm in einen Rhombus mit gegebener Seite = s zu verwandeln.

27. Desgleichen mit gegebener Diagonale BD = s.

28. Ein Parallelogramm in ein Rechteck mit gegebener Seite = s zu verwandeln.

29. Desgleichen mit gegebener Diagonale = s.

30. Ein gegebenes Dreieck zu verdreifachen.

31. Durch den gegebenen Punkt P eine Linie zu ziehen, die das gegebene Parallelogramm ABCD halbiert.

32. Das gegebene Parallelogramm ABCD von A aus in vier gleiche Teile zu zerlegen.

33. Desgleichen in fünf gleiche Teile.

34. Eine Teilungslinie, die von einem Punkt einer Seite eines Vielecks ausgeht und nicht ganz in dasselbe fällt, vollständig in die Figur zu legen.

35. Ein Dreieck von einem innerhalb gelegenen Punkte aus in vier gleiche Teile zu teilen.

36. Verbindet man die Mitten zweier Gegenseiten eines Vierecks mit den Endpunkten ihrer gegenüberliegenden Seiten, so entstehen zwei Dreiecke, deren Summe gleich dem Viereck ist. (Ziehe zum Beweis eine Diagonale.)

37. Der Schnittpunkt der Diagonalen des Vierecks ABCD sei E; verlängere EB um DE bis F und EC um AE bis G; ziehe FG, so ist $\triangle$ EFG gleich dem Viereck ABCD. (In Worten?)

38. Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, dessen Ecken auf drei gegebenen Geraden liegen.

II. Abschnitt.

Aehnlichkeit.

11. Kapitel.

Proportionale Strecken, erzeugt durch Parallellinien.

§ 85. Das Messen der Strecken.

1. Die Strecke p (Grösse p) durch die Strecke q (Grösse q) messen, heisst angeben, wie oft letztere in ersterer enthalten ist. Dass p durch q gemessen werden soll, wird arithmetisch durch $p : q$, durch das Verhältnis p zu q, ausgedrückt. Das Ergebnis der Messung ist eine unbenannte Zahl, die Verhältniszahl genannt wird.

2. Dabei sind drei Fälle möglich:

a) Die Strecke q geht in der Strecke p auf; die Verhältniszahl ist eine ganze Zahl.

b) Die Strecke q geht in p nicht auf, aber ein aliquoter Teil von q ist in p enthalten; die Verhältniszahl ist eine gebrochene Zahl.

c) Weder die Strecke q selbst, noch ein aliquoter Teil von ihr ist in p enthalten. Die Verhältniszahl ist irrational. Ein Beispiel hierzu liefert das gleichschenklig rechtwinklige Dreieck. Ist die Hypotenuse gleich p, die Kathete gleich q, so ergiebt sich $p : q = \sqrt{2}$.

In den Fällen a) und b) sind die Strecken p, q kommensurabel, im Falle c) hingegen inkommensurabel zu einander. Jede irrationale Verhältniszahl lässt sich bis zu jedem beliebigen Grad von Genauigkeit durch eine rationale ersetzen.

3. Ist die Verhältniszahl der Strecken p, q gleich derjenigen der beiden andern s, t, so heissen die vier Strecken proportional; die Gleichsetzung beider Verhältnisse liefert die Proportion p:q=s:t (p zu q wie s zu t).

4. Die Proportionalität der Strecken wird zunächst dazu verwendet, an geometrischen Gebilden Streckenpaare aufzusuchen bezw. herzustellen, welche dieselbe Verhältniszahl haben wie ein vorhandenes Paar.

§ 86. Der Proportionalsatz.

1. Um vier proportionale Strecken zu erhalten, geht man am einfachsten von einem Zweistrahl aus, der von zwei Parallelen geschnitten wird. In Fig. 72 entstehen dadurch auf dem einen Strahl die Strecken AC, AB, und es wäre zu untersuchen, ob die Figur noch ein anderes Streckenpaar enthält, welches eine Verhältniszahl aufweist gleich der von AC:AB.

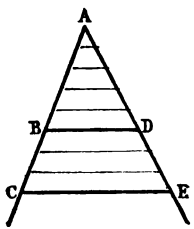


Fig. 72.

Setzt man voraus, dass die beiden Strecken AB, AC kommensurabel sind, so muss ein aliquoter Teil von AB in AC aufgehen. Ist dieser Teil in AB selbst n-mal, in AC m-mal enthalten, so hat AC:AB den Wert m/n. Legt man nun durch die Teilpunkte Linien parallel mit CE, so wird AD in n, AE in m gleiche Teile geteilt, woraus auch für AE:AD der Wert m/n folgt. Daher ist AC:AB=AE:AD.

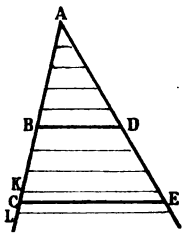


Fig. 73.

Sind hingegen die Strecken AC und AB inkommensurabel, so zerlege man (Fig. 73) AB in n gleiche Teile; AC wird nun mehr als m und weniger als $(m+1)$ solcher Teile enthalten. Das Verhältnis AC:AB ist demnach zwischen die Grenzen $\frac{m}{n}$ und $\frac{m+1}{n}$ eingeschlossen. Durch ein dem obigen analoges Verfahren ergiebt sich, dass auch AE:AD zwischen den Grenzen $\frac{m}{n}$ und $\frac{m+1}{n}$ liegt. Je grösser man n wählt, d. i. die Anzahl der Teile, in welche man AB zerlegt, umsomehr nähern sich beide Grenzen. Nach dem arithmetischen Satze „sind zwei Zahlen stets zwischen denselben Grenzen enthalten, sosehr sich letztere einander nähern, so sind die Zahlen einander gleich", ist somit auch in diesem Falle AC:AB = AE:AD.

2. Wendet man auf die soeben gefundene Proportion den Satz von der korrespondierenden Subtraktion an, so kommt AB:(AC — AB) = AD:(AE — AD), d. h. AB:BC = AD:DE.

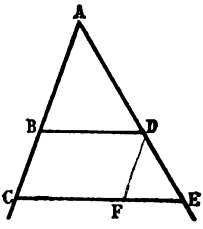


Fig. 74.

3. Fig. 74. Es ist nach Nr. 1 AC:AB = AE:AD und nach Nr. 2 BC:AB = DE:AD, folglich AC:BC = AE:DE.

4. Ziehe durch D die Parallele zu AC, welche CE in F schneidet, so ist an dem Zweistrahl E nach Nr. 3 EC:CF = EA:AD. Weil aber BD = CF ist, so hat man

auch CE : BD = AE : AD. Ebenso findet man CE : BD = AC : AB. (Fig. 74.)

Diese Ergebnisse lassen sich in Worten so fassen:

Wird ein Zweistrahl von zwei Parallelen geschnitten, so verhalten sich je zwei Abschnitte des einen Strahls wie die entsprechend liegenden des andern, und die Parallelstrecken wie die vom Scheitel bis zu ihnen genommenen Abschnitte eines Strahles.

Bemerkung. a) Diese Sätze gelten auch noch, wenn die Parallelen zu verschiedenen Seiten des Scheitels liegen. b) Sie finden Anwendung bei der Konstruktion des verjüngten Massstabes und des Proportionalzirkels.

§ 87. Kehrsatz.

Die Teile 1, 2, 3 des Proportionalsatzes lassen eine uneingeschränkte Umkehrung zu. Bilden z. B. in Fig. 75 die Strecken AC, AB, AE, AD die Proportion AC : AB = AE : AD, so lässt sich indirekt zeigen, dass CE ∥ BD ist.

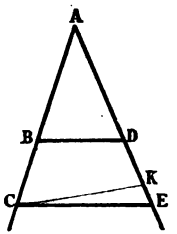


Fig. 75.

Wäre nämlich nicht CE, sondern CK die Parallele zu BD, so ist AC : AB = AK : AD. Aus dieser und der gegebenen Proportion folgt AK = AE. Da nun diese Strecken gleich gerichtet sind, so fällt K mit E zusammen, oder es ist CE ∥ BD. Ebenso beweist man die Kehrsätze zu 2, 3. In Worten:

Werden die Schenkel eines Zweistrahls von zwei Geraden so geschnitten, dass die Abschnitte auf dem einen Schenkel das gleiche Verhältnis wie die entsprechenden Abschnitte auf dem andern Schenkel haben, so gehen die schneidenden Linien parallel.

§ 88. Aufgaben.

1. Zu den gegebenen Strecken a, b, c die vierte Proportionale x zu finden, so dass $a:b=c:x$ ist.

Konstruktion. Auf den Geraden des Zweistrahls E trage $EF=a$, $EG=b$, $EH=c$ ab, ziehe FH und GJ ∥ FH. Es ist EJ die verlangte Strecke x.

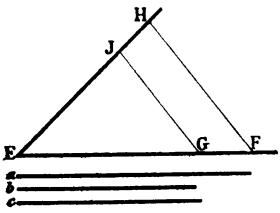


Fig. 76.

Bemerkung. Ist x ein anderes als das vierte Glied der Proportion, so stelle man diese so um, dass x das letzte Glied wird.

2. Die gegebene Strecke AB in dem gegebenen Verhältnis $m:n$ zu teilen.

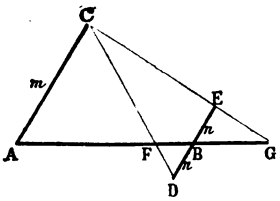


Fig. 77.

Konstruktion. Fig. 77. Mache $AC=m$; ziehe durch B die Parallele DE zu AC, so dass $BD=BE=n$ wird. Verbinde C mit D und E; diese Linien schneiden AB in F und G, durch welche Punkte die gewünschte Teilung erfolgt.

Beweis. Es ist $AF:FB=AC:BD$, und $AG:BG=AC:BE$; aber weil $AC=m$, $BD=BE=n$ ist, so erhält man $AF:BF=m:n$ und $AG:BG=m:n$.

3. Bemerkung. Man sagt die Punkte F und G teilen AB im Verhältnis $m:n$ harmonisch. Ist nämlich $m:n=3:1$, so geben Saiten von den Längen AG, AB, AF Grundton, Quint, Oktav; ist $m:n=5:1$, so erzeugen sie den Dreiklang (Grundton, Terz, Quint). Die Pythagoreer nannten die Proportion $(a-x):(x-b)=a:b$ eine harmonische.

§ 89. Transversalen.

Eine nähere Untersuchung der zweiten Aufgabe des vorigen Paragraphen liefert interessante Eigenschaften der Schwerlinien eines Dreiecks. Es ist klar, dass — Fig. 78 — die Punkte F und G durch A, B und das Verhältnis m : n eindeutig bestimmt sind. Verlängert man demnach CA um sich selbst bis K, so muss KE durch F und KD durch G gehen. Erhält nun m:n den Wert 2 : 1, so sind AG, CD, KE die Schwerlinien des △ CKG. Auch ist CF:FD = AC:BD = 2 : 1. In Worten:

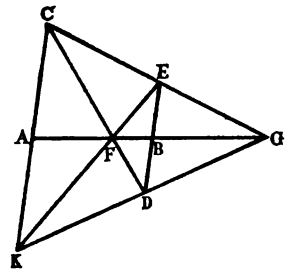


Fig. 78.

In jedem Dreieck schneiden sich die drei Transversalen in einem Punkt (Schwerpunkt) im Verhältnis 2 : 1.

Bemerkung. Der Schwerpunkt ist der vierte merkwürdige Punkt des Dreiecks.

§ 90. Medianen.

1. Die Thatsache, dass im gleichschenkligen Dreieck die Mediane des Winkels an der Spitze die Grundseite in zwei gleiche Teile teilt, weist auf eine einfache Beziehung zwischen den beiden Abschnitten auf der dritten Seite und den anstossenden Seiten für den Fall

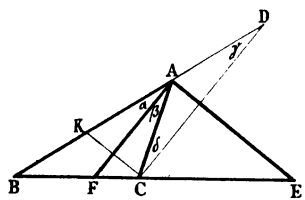


Fig. 79.

hin, das letztere nicht gleich sind. Dieser Zusammenhang soll nun aufgedeckt werden. In Fig. 79 halbiere AF den $\sphericalangle$A des Dreiecks BAC. Wird CD $\parallel$ FA gezogen, so ist $\sphericalangle \alpha = \gamma$, $\sphericalangle \beta = \delta$; da aber $\sphericalangle \alpha = \beta$ ist, so folgt $\sphericalangle \gamma = \delta$ und daraus AD = AC. Ferner ist BF : FC = BA : AD. Folglich BF : CF = AB : AC. Ebenso zeigt man, wenn AE den Aussenwinkel CAD halbiert, dass die Proportion gilt BE : CE = AB : AC. In Worten:

In jedem Dreieck teilt die Halbierungslinie eines Innen- oder Aussenwinkels die Gegenseite im Verhältnis der anstossenden Seiten.

Bemerkung. Wird der Zweistrahl B von den beiden Parallelen AF, DC so geschnitten, dass AF den $\sphericalangle$BAC halbiert, so erhält man die soeben benützte Figur. Hieraus ergiebt sich die Bedeutung der Hilfslinie CD und die Folgerung, dass der Medianensatz ein besonderer Fall des Proportionalsatzes ist.

2. Als Halbierungslinien zweier Nebenwinkel stehen AF und AE senkrecht aufeinander; mithin geht der über FE als Durchmesser beschriebene Kreis durch A. Dieser Kreis wird nach Apollonius von Perga (200 v. Chr.) der Apollonische Kreis genannt.

3. Der geometrische Ort eines Punktes, der von zwei gegebenen Punkten ein konstantes Verhältnis der Entfernungen hat, ist der Apollonische Kreis. — Verwendung bei Dreiecksaufgaben, in denen die Grundseite und das Verhältnis der Nebenseiten gegeben ist.

§ 91. Uebungen.

1. Werden zwei Geraden von drei Parallelen geschnitten, so sind die Abschnitte auf der einen Geraden den gleichliegenden auf der anderen proportional.

2. Wird ein Dreistrahl von zwei Parallelen getroffen, so sind die gleichliegenden Abschnitte auf letzteren proportional.

3. Die eine Diagonale eines Parallelogramms halbiert alle Strecken, welche parallel der anderen Diagonale in dem Parallelogramm gezogen werden.

4. Die Diagonalen eines Trapezes schneiden sich im Verhältnis der Grundseiten.

5. Teilt man die Seite AB des $\triangle$ ABC in D so, dass sich verhält $AD : DB = m : n$ und zieht man durch D die Parallele zu BC, so wird auch AC in E im Verhältnis $m : n$ geschnitten, und die Parallele DE ist gleich $\frac{m}{m+n} . BC$.

6. Teilt man die Nebenseiten AB und DC des Trapezes ABCD in gleicher Weise im Verhältnis von $m : n$, so ist die Verbindungslinie der Teilpunkte den Grundseiten parallel und gleich $(mb + nd) : (m + n)$.

7. Schneidet eine Gerade, die von einer Ecke eines Parallelogramms ausgeht, $1 : n$ von der Gegenseite ab, so schneidet sie von der Diagonale $1 : (n+1)$ ab.

8. Wie heissen die Umkehrungen der Medianensätze und ihre Beweise?

9. Die drei Schwerlinien zerlegen das Dreieck in sechs gleiche Teile.

10. Zieht man durch den Schwerpunkt eines Dreiecks eine Gerade, so ist immer die Entfernung einer Ecke von dieser Linie so gross wie die Summe der Entfernungen der zwei andern Ecken.

11. Fällt man von den drei Ecken und dem Schwerpunkt S eines Dreiecks Lote auf eine Gerade, so ist das von S gefällte Lot das arithmetische Mittel aus den drei andern.

12. Wenn irgend eine Gerade die Seiten eines Dreiecks schneidet (bezw. deren Verlängerungen), so sind die beiden Produkte je dreier nicht anstossender Abschnitte der Seiten gleich. (Satz des Menelaos.)

13. Umkehrung dieses Satzes.

14. Die Halbierungslinien zweier Dreieckswinkel und die Mediane des Aussenwinkels an der dritten Ecke schneiden die Gegenseiten in drei Punkten, die auf einer Geraden liegen.

15. Verbindet man einen Punkt mit den Ecken eines Dreiecks, so teilt jede Verbindungslinie die Gegenseite derart in zwei Abschnitte, dass die beiden Produkte aus je drei nicht anstossenden Segmenten einander gleich sind. (Satz des Bernoulli, auch Satz des Ceva genannt.)

16. Umkehrung dieses Lehrsatzes.

17. Die Verbindungslinien der Ecken eines Dreiecks mit den Berührungspunkten der drei den Gegenseiten anbeschriebenen Kreise schneiden sich in einem Punkte. (Fünfter merkwürdiger Punkt des Dreiecks.)

18. Die Strecke AB in drei Teile zu zerlegen, die sich wie m : n : p verhalten.

19. Aus der Summe bezw. der Differenz zweier Strecken und ihrem Verhältnis m : n die Strecken zu bestimmen.

20. Durch den Punkt A eine Gerade zu ziehen, deren Abstände von B, C sich wie m : n verhalten.

21. Eine Gerade zu finden, deren Entfernungen von A, B, C sich wie m : n : p verhalten.

22. Den geometrischen Ort eines Punktes zu finden, dessen Abstände von zwei Geraden das Verhältnis m : n haben.

23. In einem Dreieck den Punkt zu finden, dessen Entfernungen von den drei Seiten sich wie m : n : p verhalten.

24. $\triangle$ aus a, t_b, t_c; 25. $\triangle$ aus α, t_b, t_c; 26. $\triangle$ aus a, h_a, b : c.

27. Auf dem Umfang eines Kreises sind die Punkte C, B gegeben. Auf dem Kreise den Punkt A so zu finden, dass AC : AB = m : n sei.

28. In einem Trapez parallel den Grundseiten eine Gerade so zu ziehen, dass die von den Nebenseiten und einer Diagonale begrenzten Abschnitte gleich werden.

29. Durch einen Punkt P innerhalb eines gegebenen Kreises die Sehne XY so zu ziehen, dass $PX : PY = m : n$ werde.

30. Innerhalb des $\triangle ABC$ den Punkt X so zu bestimmen, dass seine Entfernungen von den Ecken sich wie $m : n : p$ verhalten.

31. In einem gegebenen Kreis fünf Quadrate so zu zeichnen, dass das mittlere mit jedem äusseren eine Seite gemeinsam habe und die äusseren acht Ecken auf der Kreislinie liegen.

12. Kapitel.

Proportionale Strecken, erzeugt durch Wechsellinien.

§ 92. Erklärungen.

1. Fig. 80. Wendet man in der Figur des Proportionalsatzes die eine der beiden Parallelen, z. B. DE, um die Mediane des Zweistrahls um, wodurch sie in die Lage D′E′ gelangt, so nennt man diese umgeklappte Linie D′E′ samt der andern Parallele Wechsellinien. Ferner heissen die Winkel AE′D′ und ACB, die nach einer Zurückklappung Gegenwinkel würden, korrespondierende Winkel.

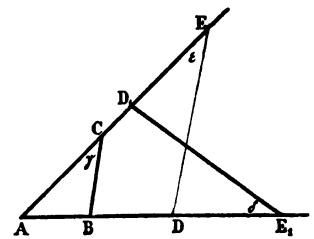


Fig. 80.

2. a) Weil $\sphericalangle \gamma = \varepsilon, \sphericalangle \varepsilon = \delta$ ist, so folgt $\sphericalangle \gamma = \delta$. D. h.: Korrespondierende Winkel an Wechsellinien sind gleich.

b) Des weiteren ist $AD' = AD$, $AE' = AE$. Somit

geht die Proportion $AC:AB=AE:AD$ in folgende über $AC:AB=AE':AD'$, daher $AC\,.\,AD'=AB\,.\,AE'$. D. h.:

Wird ein Zweistrahl von zwei Wechsellinien geschnitten, so ist das Produkt der vom Scheitel aus gemessenen Abschnitte auf der einen Geraden gleich dem Produkt der Abschnitte auf der andern.

Bemerkung. Die Sätze a, b lassen sich auch umkehren.

3. Da ferner $D'E'=DE$ ist, so liefern die Proportionen $AC:BC=AE:ED$ und $AB:BC=AD:DE$ die beiden nachstehenden $AC:BC=AE':E'D'$ und $AB:BC=AD':D'E'$.

§ 93. Wechsellinien am Dreieck und am Kreis.

1. In Fig. 81 sind AE, BD zwei Höhen des Dreiecks ABC. Die Winkel δ, ε sind einander gleich und korrespondierende Winkel; mithin sind AE und BD Wechsellinien im Zweistrahl C. Daher gilt die Beziehung $CA:CB=AE:BD$. D. h.: In jedem Dreieck verhalten sich die Höhen umgekehrt wie die zugehörigen Seiten.

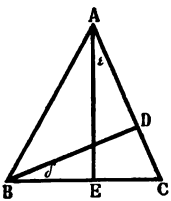


Fig. 81.

Bemerkung. Fälle von einem Punkte der Diagonale A C des Parallelogramms ABCD auf die in A zusammenstossenden Seiten die Lote und untersuche das Verhältnis derselben.

2. Ist in Fig. 82 ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit der Höhe AD, so ist bekannt, dass die $\sphericalangle$ α, β gleich sind. Auch liegen sie korrespondierend; mithin sind AD, AB Wechsellinien des Zweistrahls C. Folglich ist $b^2=a\,.\,p$; ebenso $c^2=a\,.\,q$. D. h.:

Im rechtwinkligen Dreieck ist jede Kathete mittlere Proportionale zu der Hypotenuse und ihrer Projektion auf diese. (Kathetensatz.)

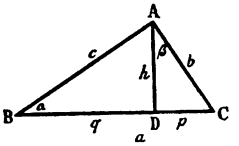
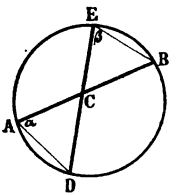


Fig. 82.

3. In gleicher Weise findet man $h^2 = p.q$. D. h.:

Im rechtwinkligen Dreieck ist die Höhe mittlere Proportionale zu den beiden Abschnitten der Hypotenuse. (Höhensatz.)

4. Schneiden sich (Fig. 83) zwei Sehnen AB, ED innerhalb oder ausserhalb eines Kreises, und zieht man AD, EB, so sind diese Geraden Wechsellinien, denn die korrespondierenden Winkel α, β sind einander gleich. Folglich ist $CA.CB = CD.CE$. Das gleiche Produkt liefert jede durch C gezogene Sehne. D. h.:



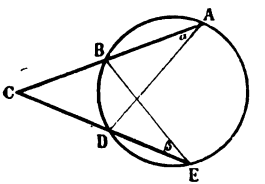


Fig. 83.

Legt man durch einen Punkt Linien, die einen Kreis schneiden, so hat das Produkt aus den vom Punkte einerseits und dem Kreise andererseits begrenzten Abschnitten für jede Gerade den gleichen Wert. (Sehnensatz.)

5. Wird eine Sekante zur Tangente — Fig. 84 — so sind auch diesesmal EA, DA Wechsellinien. Demnach ist $CA^2 = CD.CE$. Das nämliche Produkt liefert jede andere durch C gezogene Sekante. Daher:

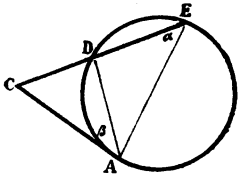


Fig. 84.

Legt man durch einen Punkt Sekanten und die beiden Tangenten an einen Kreis, so ist jede Tangente mittlere Proportionale zwischen den von dem Punkte einerseits und dem Kreise andrerseits begrenzten Abschnitten auf jeder Sekante. (Tangentensatz.)

Bemerkung. Wie heissen die Kehrsätze zu Nr. 4, 5?

§ 94. Aufgabe.

Zu zwei gegebenen Strecken p, q die mittlere Proportionale zu finden.

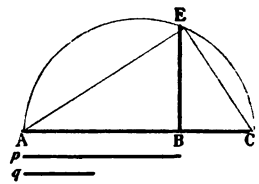


Fig. 85.

Konstruktion. Schneide auf einer Geraden — Fig. 85 — $AB = p$, $BC = q$ ab. Errichte über AC als Durchmesser den Halbkreis und auf AC in B das Lot. Beide Linien schneiden sich in E. Es ist BE die gesuchte Proportionale. — Beweis nach § 93, 3.

Bemerkung. Löse die vorliegende Aufgabe mit dem Katheten-, Sehnen- und Tangentensatz.

§ 95. Die stetige Teilung.

1. Der Satz 5 des Paragraphen 93 enthält einen interessanten speziellen Fall. Wird nämlich die Figur 84 so entworfen, dass CE Zentrale und die Tangente CA so lang wie der Durchmesser wird — Fig. 86 —

so gilt immer $CA^2 = CD \cdot CE$ oder jetzt $DE^2 = CD \cdot CE$.

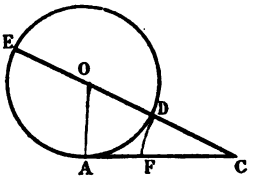


Fig. 86.

2. Eine Strecke ist stetig geteilt, wenn der grössere Abschnitt (Maior) mittlere Proportionale zwischen der ganzen Strecke und dem kleineren Teil (Minor) ist. In Fig. 86 ist EC in D stetig geteilt. Die stetige Teilung heisst auch der goldene, göttliche Schnitt (sectio aurea, divina).

3. Macht man in Fig. 86 $CF = CD$, so ist zunächst nach dem Tangentensatz $CE : CA = CA : CD$, hieraus $(CE - CA) : CA = (CA - CD) : CD$. Indessen ist $ED = AC$, $CF = CD$. Daher $CF : CA = AF : CF$. D. h.: AC ist in F stetig geschnitten.

4. Da sowohl AC als auch EC nach dem goldenen Schnitte geteilt sind, so ergiebt sich durch Zusammennehmen beider Resultate: a) Wird eine stetig geteilte Strecke um den Maior verlängert, so ist die ganze Strecke stetig geteilt. b) Wird auf dem Maior einer stetig geteilten Strecke der Minor abgetragen, so ist ersterer stetig geteilt.

§ 96. Aufgabe.

Die gegebene Strecke AC stetig zu teilen.

Konstruktion. Fig. 86. Errichte auf AC in A das Lot $OA = \frac{1}{2} AC$. Beschreibe um O den Kreis, der AC in A berührt; ziehe CO. Diese Gerade schneidet den Kreis in D. Trage auf CA die Strecke $CF = CD$ ab, so ist AC in F wie verlangt geteilt. — Beweis nach § 95, 3.

§ 97. Das regelmässige Zehn- und Fünfzehneck.

1. Eine nach dem goldnen Schnitt zerlegte Strecke kann in fruchtbarer Weise zum Aufbau geometrischer Figuren verwendet werden. Dieser Paragraph zeigt, wie die Konstruktion des regulären Zehnecks damit zusammenhängt. In Fig. 87 sei AB die Zehneckseite, C der Mittelpunkt des um das Polygon beschriebenen Kreises. Der $\sphericalangle \gamma$ ist daher $= 36^0$, folglich $\sphericalangle \alpha = \beta = 72^0$. Halbiert man $\sphericalangle$ CAB durch AD, so ist $\sphericalangle \alpha' = \alpha'' = 36^0$. Ferner $\sphericalangle \delta = 72^0$. Diese Rechnung führt zu der Thatsache, dass $CD = AD = AB$ ist. Sie zeigt aber auch, dass AD und AC Wechsellinien des Zweistrahles B sind. Deswegen gilt die Gleichung $AB^2 = BD \cdot BC$, und weil $CD = AB$ ist, auch die andere $CD^2 = BD \cdot BC$. D. h.: BC ist in D stetig geteilt und AB ist gleich dem Maior. In Worten:

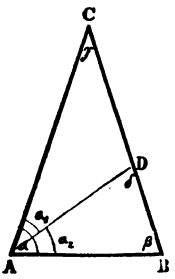


Fig. 87.

Die Seite des regulären Zehnecks ist gleich dem Maior des stetig geteilten Radius.

2. Aufgabe. In einen gegebenen Kreis ein regelmässiges Zehneck zu konstruieren.

Konstruktion. Teile einen Radius stetig und trage den Maior zehnmal aufeinanderfolgend als Sehne ein.

3. Mit Hilfe des Zehnecks lässt sich auf einfache Weise das reguläre 5, 20, 40, 80 . . . Eck erhalten.

4. Der Zentriwinkel des regelmässigen Sechsecks ist 60^0, derjenige des Zehnecks 36^0, der Unterschied beider Winkel beträgt 24^0. Da aber $360^0 : 24^0 = 15$ ist, so wird damit auch die Herstellung des regelmässigen 15-Ecks angedeutet. Fortgesetztes Halbieren der Zentriwinkel liefert das 30, 60, 120 . . . Eck.

5. Mit Zirkel und Lineal lassen sich nun folgende reguläre Polygone konstruieren: das 3, 6, 12 . . . Eck, das 4, 8, 16 . . . Eck, das 5, 10, 20 . . . Eck, das 15, 30, 60 . . . Eck. Ausser diesen ist die Herstellung eines n-Ecks möglich, wenn n eine Primzahl und wenn zugleich $(n-1)$ eine Potenz von 2 ist; also z. B. das 17, 257, 65537-Eck. Diese Thatsache hat Gauss 1796 gefunden. Die anderen regelmässigen Vielecke müssen durch Annäherungsverfahren konstruiert werden. Ein solches für jedes $n > 5$ passende wurde von Karl Bernhard zu Sachsen-Weimar angegeben. Man teile — Fig. 88 — den Durchmesser AB in n (hier 7) gleiche Teile, verlängere AB bis C und den zu AB senkrechten Radius OF bis E um je einen Teil.

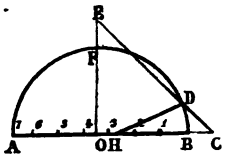


Fig. 88.

Ziehe CE, welche Linie den Kreis in D schneidet. Verbinde D immer mit dem dritten Teilpunkte H (von B aus gerechnet). Die Strecke DH ist mit grosser Annäherung die Seite des gesuchten n (hier 7) Ecks.

§ 98. Bemerkungen zum goldenen Schnitt.

In seiner Abhandlung „divina proportione" behandelt (1497) Luca Paciuoli den goldenen Schnitt ziemlich ausführlich. Er führt 13 Beziehungen an einer stetig geteilten Linie auf, die er Wirkungen nennt. Die grosse Arbeit von Pfeiffer (1885) „Der goldne Schnitt und dessen Erscheinungsformen in Mathematik, Natur und Kunst" hat es wahrscheinlich gemacht, dass die stetige Teilung häufig auftritt. Pfeiffer untersuchte diesbezüglich den menschlichen Körper, Tiere, Pflanzen, Werke der Bau- und Tonkunst, der Plastik, der Malerei. Man vergleiche auch Zeising „Die Proportionen des

menschlichen Körpers", 1854, und Lersch, „Die harmonischen Verhältnisse in den Bahnelementen des Planetensystems", 1880. Wird die zu teilende Strecke = 1 gesetzt, so ist der Wert des Maior = $^1/_2$ $(-1+\sqrt{5})$. Verwandelt man diesen Ausdruck in einen Kettenbruch, so erhält man

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+..}}}$$

Die Näherungswerte desselben sind 1, $^1/_2$, $^2/_3$, $^3/_5$, $^5/_8$ u. s. w. — Lamé'sche Reihe. — Diese Brüche geben merkwürdiger Weise die Stellung der Blätter, der Schuppen an den Zapfen und dergl. an.

§ 99. Uebungen.

1. Kehrsatz zu § 93, 2.
2. Kehrsatz zu § 93, 3.
3. Der Schnittpunkt der Höhen eines Dreiecks teilt jede Höhe in zwei Abschnitte, und es sind die drei Produkte aus den beiden Abschnitten derselben Höhe einander gleich.
4. Die mittlere Proportionale von zwei Strecken ist kleiner als deren arithmetisches Mittel.
5. Berühren sich zwei Kreise von aussen, so ist das Stück der gemeinsamen Tangente zwischen den Berührungspunkten mittlere Proportionale zu den beiden Durchmessern.
6. Im rechtwinkligen Dreieck verhalten sich die Kathetenquadrate wie die Projektionen der Katheten auf die Hypotenuse.
7. Schneiden sich zwei Kreise und man zieht von einem Punkte der verlängerten gemeinsamen Sehne die Tangenten an die Kreise, so sind deren Abschnitte bis zu den Berührungspunkten gleich. Eine Linie von solcher Eigenschaft heisst Chordale.

8. Sind A, B die Zentren, r und ϱ die Radien beider Kreise, C ein Punkt der Chordale, so ist $AC^2 - CB^2 = r^2 - \varrho^2$.

9. Die Chordale steht auf der Zentrale senkrecht.

10. Welche Linie ist Chordale, wenn sich die Kreise berühren?

11. Wie erhält man die Chordale, wenn sich die Kreise nicht schneiden?

12. Die Chordale halbiert die äusseren und die inneren gemeinschaftlichen Tangenten.

13. Die drei Chordalen dreier Kreise schneiden sich in einem Punkte.

14. In einem rechtwinkligen Dreieck sei eine Kathete die mittlere Proportionale zu der Hypotenuse und der andern Kathete. Es sollen Eigenschaften dieses Dreiecks angegeben werden.

15. Zieht man im regulären Fünfeck zwei sich schneidende Diagonalen, so teilt der Schnittpunkt jede stetig und der Maior ist gleich der Fünfeckseite.

16. Im regulären Fünfeck werden zwei nicht aufeinanderfolgende Seiten bis zum Schnitt verlängert. Wie lang ist jede Verlängerung?

17. Zwei Strecken zu konstruieren, deren Summe und mittlere Proportionale gegeben ist.

18. Desgleichen, wenn statt der Summe die Differenz gegeben ist.

19. Einen Winkel von 18° zu konstruieren.

20. Über der festliegenden Strecke AB als Seite des Zehnecks oder des Fünfzehnecks das genannte regelmässige Vieleck zu konstruieren.

21. Einen Kreis zu finden, der durch A und B geht und so liegt, dass die von C an ihn gezogene Tangente = t wird.

22. $\odot$ aus A, B, L.

23. $\odot$ aus A, L, L'; 24. $\odot$ aus A, B, K.

25. In dem bei A stumpfwinkligen Dreieck ABC von A nach BC die Gerade AE so zu ziehen, dass $AE^2 = BE \cdot CE$ werde.

26. Zwei Strecken zu finden, deren Quadrate sich wie p : q verhalten.

27. Die gegebene Strecke AB so zu teilen, dass sich die Quadrate der Abschnitte wie p : q verhalten.

28. Auf der gegebenen Geraden L den Punkt X zu finden, von dem aus die gegebene Strecke AB unter dem grössten Winkel erscheint.

---

13. Kapitel.

Aehnlichkeit der Vielecke.

§ 100. Einführung.

1. Zwei Vielecke von gleicher Seitenzahl heissen ähnlich ($\sim$), wenn die Winkel des einen den Winkeln des andern einzeln verglichen gleich und alle entsprechenden Seiten proportional sind. Z. B. ist Viereck $ABCD \sim A'B'C'D'$, wenn $\sphericalangle A = A'$, $\sphericalangle B = B'$, $\sphericalangle C = C'$, $\sphericalangle D = D'$, und $AB : A'B' = BC : B'C' = CD : C'D' = DA : D'A'$ oder $AB : BC : CD : DA = A'B' : B'C' : C'D' : D'A'$.

2. Aehnliche Vielecke haben gleiche Gestalt; kongruente Vielecke sind auch ähnlich.

3. Sind zwei Vielecke einem dritten ähnlich, so sind sie auch unter sich ähnlich.

4. Wenn von zwei kongruenten Vielecken das eine einem dritten ähnlich ist, so ist auch das andere dem dritten ähnlich.

§ 101. Die Aehnlichkeit der Dreiecke.

1. Zieht man in einem Dreieck zu einer Seite die Parallele, so wird ein zweites Dreieck abgeschnitten, das dem gegebenen ähnlich ist.

2. **I. Aehnlichkeitssatz:** Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Seiten des einen zweien Seiten des andern proportional und die von ihnen eingeschlossenen Winkel gleich sind.

Beweis. Fig. 89. Ist in den $\triangle$ ABC und DEF $\sphericalangle \beta = \varepsilon$, AB : BC = DE : EF, so trage man auf BC die Strecke BK = EF ab und ziehe KL $\parallel$ CA. Nun ist AB : BC = BL : BK. Aus dieser Proportion und derjenigen der Voraussetzung ergiebt sich BL = ED. Mithin $\triangle$ BLK $\cong$ DEF. Nach Nr. 1 ist BLK $\sim$ ABC, daher auch DEF $\sim$ ABC.

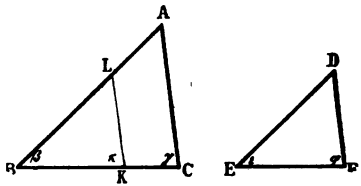


Fig. 89.

3. **II. Aehnlichkeitssatz:** Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Winkel des einen zweien Winkeln des andern gleich sind.

Beweis. Fig. 89. Ist diesesmal $\sphericalangle \beta = \varepsilon$, $\sphericalangle \gamma = \varphi$, so konstruiere man wie vorhin. Dadurch wird $\sphericalangle \varkappa = \gamma$; aber es ist $\sphericalangle \gamma = \varphi$; daher ist $\sphericalangle \varkappa = \varphi$. Nun ist $\triangle$ BKL $\cong$ DEF und $\triangle$ BKL $\sim$ BCA, daher auch $\triangle$ DEF $\sim$ ABC.

4. **III. Aehnlichkeitssatz:** Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn die drei Seiten des einen denen des andern proportional sind.

Beweis. Fig. 89. Es ist vorausgesetzt AB : BC : AC = DE : EF : FD. Konstruiere wie oben; dann ist AB : BC : AC = BL : BK : KL. Beide Proportionen liefern das Ergebnis BL = ED, KL = FD. Mithin ist $\triangle$ BKL $\cong$ DEF und damit auch $\triangle$ DEF $\sim$ ABC.

5. **IV. Aehnlichkeitssatz:** Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Seiten des einen zweien

des andern proportional und die der grösseren von beiden Seiten gegenüberliegenden Winkel gleich sind.

Beweis. Fig. 89. Die Voraussetzung ist $AB:BC = DE:EF$, $\sphericalangle \gamma = \varphi$. Man konstruiere wie oben. Dadurch erhält man $AB:BC = BL:BK$; also ist $BL = ED$. Auch ist $\sphericalangle \varkappa = \gamma$, $\sphericalangle \gamma = \varphi$; somit ist $\sphericalangle \varkappa = \varphi$; folglich ist $\triangle BKL \cong EFD$ und hiermit auch $\triangle DEF \sim ABC$.

6. Bemerkung. a) Die Gestalt eines Dreiecks ist eindeutig bestimmt durch das Verhältnis zweier Seiten und den eingeschlossenen Winkel, durch zwei Winkel, durch das Verhältnis der drei Seiten, durch das Verhältnis zweier Seiten und den Gegenwinkel der grösseren Seite; allgemein: durch zwei von einander unabhängige Bedingungen. Wie lauten die entsprechenden Sätze für das rechtwinklige, das gleichschenklige, das gleichseitige und das rechtwinklig gleichschenklige Dreieck? b) die Aehnlichkeit der Dreiecke ist ein vorzügliches Mittel, die Gleichheit zweier Winkel oder die Proportionalität von Strecken zu erweisen.

7. Zusatz. In ähnlichen Dreiecken haben je zwei homologe Höhen, Transversalen, Medianen, Radien das gleiche Verhältnis wie zwei entsprechende Seiten.

§ 102. Aufgabe.

Viele Konstruktionsaufgaben werden in der Weise gelöst, dass man (n—1) der gegebenen Bedingungen dazu benützt, die Gestalt der gesuchten Figur herzustellen; die so erhaltene Figur wird unter Beibehaltung der Gestalt so vergrössert bezw. verkleinert, dass sie noch die n-te Bedingung erfüllt.

Beispiel: $\triangle$ aus $a:b:c = m:n:p$ und h_a. —

Konstruktion. Fig. 90. Zeichne das $\triangle$ $AB'C'$ aus $B'C' = m$, $C'A = n$, $AB' = p$. Dieses ist die Gestalt des gewünschten Dreiecks. Hierauf ziehe $AD' \perp B'C'$ und trage darauf $AD = h_a$ ab; schliesslich lege $BC \parallel B'C'$ durch D. $\triangle$ ABC ist das verlangte.

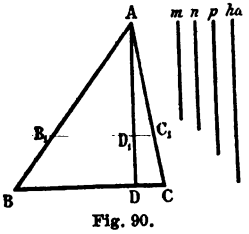


Fig. 90.

§ 103. Satz des Ptolemäus.

Die Seiten und Diagonalen eines Sehnenvierecks stehen in einer einfachen Beziehung zu einander, die durch die Aehnlichkeit der Dreiecke erschlossen werden kann. Macht man nämlich in dem Sehnenviereck ABCD $\sphericalangle BAK = DAC$, so ist $\triangle ABK \sim DAC$. Hieraus folgt $a:BK = e:c$ oder $a.c = e.BK$. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke AKD und ABC ergiebt sich ebenso $b.d = e.DK$. Addiert: $ac + bd = e.(BK + DK) = ef$. D. h.:

In jedem Sehnenviereck ist das Produkt der Diagonalen gleich der Summe der Produkte aus den Gegenseiten.

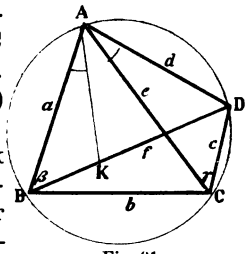


Fig. 91.

§ 104. Uebungen.

1. Aehnliche Polygone werden durch die Diagonalen, die von zwei homologen Ecken ausgehen, in paarweis ähnliche Dreiecke zerlegt.

2. Parallelogramme sind ähnlich, wenn zwei anstossende Seiten gleiches Verhältnis haben und die ein-

geschlossenen Winkel einander gleich sind. Rechtecke sind ähnlich, wenn zwei anstossende Seiten gleiches Verhältnis haben. Rhomben sind ähnlich, wenn sie in einem Winkel übereinstimmen.

3. Die Umfänge ähnlicher Vielecke verhalten sich wie ein Paar homologer Seiten.

4. Die Umfänge regelmässiger Vielecke von gleicher Seitenzahl verhalten sich wie zwei entsprechende Strecken.

5. Welchen Satz erhält man aus dem Ptolem. Lehrsatz, wenn das Sehnenviereck in ein Rechteck übergeht?

6. Ein Dreieck von gegebener Gestalt und Seite zu konstruieren.

7. Ein Vieleck mit einer gegebenen Seite zu konstruieren, welches einem gegebenen Vieleck ähnlich ist.

8. $\triangle$ aus $b : c = m : n$, α, t_a; 9. $\triangle$ aus $b : c = m : n$, α, r.

10. $\triangle$ aus β, γ, w_a; 11. $\triangle$ aus $h_a : h_b = m : n$, γ, ϱ.

12. Rechtwinkliges $\triangle$ aus $b : c = m : n$, h.

13. Gleichschenkliges $\triangle$ aus $a : b = m : n$, h_b.

14. Rechteck aus $a : b = m : n$, e.

15. Rhombus aus $e : f = m : n$, a.

16. Viereck aus $a : b : c : d = m : n : p : q$, α, e.

17. Viereck aus $a : b = m : n$, β, $\sphericalangle$ fd, $\sphericalangle$ fc, e.

18. Dem gegebenen Dreieck ABC ein Quadrat einzubeschreiben. (Zeichne über BC als Seite nach aussen das Quadrat BCDE und verbinde A mit E und D.)

19. In einen Sektor ein Quadrat zu beschreiben, so dass zwei Ecken auf dem Bogen liegen.

20. In ein Dreieck ein Rechteck zu beschreiben, dessen Seiten sich wie m : n verhalten.

21. In ein Dreieck einen Rhombus zu beschreiben, dessen Diagonalen das Verhältnis m : n haben.

22. In dem $\triangle$ ABC sei H der Schnittpunkt der Höhen, O der Schnittpunkt der Mittellote OD, OE und OF auf den Seiten BC, CA und AB, ferner S der Schwerpunkt des Dreiecks. Zu beweisen, dass

a) $AH = 2 . OD$, $BH = 2 . OE$, $CH = 2 OF$ ist;

b) die Punkte O, S und H auf einer Geraden liegen und $HS = 2 . SO$ ist (Satz des Euler);

c) die Mitte von OH das Zentrum eines Kreises ist, der durch die Mitten der Seiten und der oberen Höhenabschnitte wie auch durch die Fusspunkte der Höhen geht. (Feuerbachscher Kreis, 1822.)

23. Es sind B und C die Mittelpunkte zweier Kreise, BD und CE zwei gleichgerichtete, BD und CF zwei gegengerichtete parallele Radien. Die Linien DE und DF schneiden die Zentrale in A und J, welche Punkte die Aehnlichkeitspunkte der Kreise und zwar A der äussere, J der innere genannt werden. Man soll zeigen, dass A und J feste Punkte der Zentrale sind, ferner dass A der Schnittpunkt der äusseren gemeinsamen Tangenten, J derjenige der inneren gemeinsamen Tangenten ist.

24. Die Aehnlichkeitspunkte zweier Kreise zu konstruieren.

25. Desgleichen, wenn sich die Kreise von aussen, von innen berühren.

26. Desgleichen, wenn die Kreise konzentrisch liegen.

27. Desgleichen, wenn die Kreise gleich gross sind.

28. Die drei äusseren Aehnlichkeitspunkte dreier Kreise liegen auf einer Geraden.

29. Je zwei innere Aehnlichkeitspunkte und ein äusserer liegen auf einer Geraden.

30. $\odot$ aus A, L, K.

31. $\odot$ aus A, K, K'.

32. In jedem Dreieck ist $b \cdot c = 2 \cdot r \cdot h_a$.

33. In jedem Dreieck ist $w_a^2 = b \cdot c - u \cdot v$.

14. Kapitel.

Die Ausmessung geradliniger Figuren.

§ 105. Das Verhältnis von Inhalten.

1. Um das Verhältnis der Inhalte zweier geradlinigen Figuren zu ermitteln, geht man erfahrungsgemäss von zwei Rechtecken ABCD, EFGH aus,

— Fig. 92 — welche gleiche Grundseite AB = EF haben. Sind die Höhen BC und FG kommensurabel, so wird das gemeinsame Mass in BC m-mal und in FG n-mal enthalten sein. Die durch die Teilpunkte zu der Grundseite parallel gezogenen Linien zerlegen das Rechteck ABCD in m, das Rechteck EFGH in n untereinander gleiche Rechtecke. Daher ABCD : EFGH = m : n; weil aber auch BC : FG = m : n, so folgt ABCD : EFGH = BC : FG. Man kann jedoch in einem Rechteck jede Seite zur Grundseite nehmen, mithin:

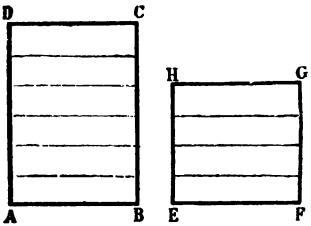


Fig. 92.

Zwei Rechtecke mit gleicher Grundseite (Höhe) verhalten sich dem Inhalt nach wie die Höhen (Grundseiten).

Wenn die Höhen nicht kommensurabel sind, so wende man zur Beweisführung ein Verfahren an, das dem des § 86, 1 analog ist.

2. Haben die Rechtecke F und F′ neben den ungleichen Höhen h, h′ auch noch ungleiche Grundseiten g, g′, so konstruiere man zur Ermittelung des Inhaltsverhältnisses das Rechteck F″ mit der Grundseite = g und der Höhe = h′. Alsdann ist nach Nr. 1 F : F″ = h : h′, ferner F″ : F′ = g : g′; daher F : F′ = g . h : g′ . h′. In Worten:

Die Inhalte zweier Rechtecke verhalten sich wie die Produkte aus zwei anstossenden Seiten.

3. Jedes Parallelogramm lässt sich in ein Rechteck mit gleicher Grundseite und Höhe verwandeln, und

jedes Dreieck ist die Hälfte eines Parallelogramms von gleicher Grundseite und Höhe. Daher:

a) Die Inhalte zweier Parallelogramme oder Dreiecke mit gleicher Grundseite (Höhe) verhalten sich wie die Höhen (Grundseiten).

b) Die Inhalte zweier Parallelogramme oder Dreiecke verhalten sich wie die Produkte aus Grundseite und Höhe.

4. Stimmen zwei Dreiecke in einem Winkel überein — Fig. 93 — wie ABC, DEF wo $\sphericalangle B = E$ ist, so lässt sich der für das Verhältnis der Inhalte gefundene Ausdruck umformen. Fällt man nämlich die Lote AK und DL, so ist $AK : DL = AB : DE$, somit $ABC : DEF = AB \cdot BC : DE \cdot EF$. In Worten:

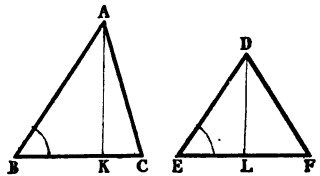


Fig. 93.

Die Inhalte zweier Dreiecke, die in einem Winkel übereinstimmen, verhalten sich wie die Produkte der diesen Winkel einschliessenden Seiten.

5. Ist ausserdem noch $\sphericalangle A = D$, so sind die beiden Dreiecke ähnlich, daher $AB : DE = BC : EF$. Das Verhältnis der Inhalte wird demnach $ABC : DEF = BC^2 : EF^2$. In Worten:

Die Inhalte zweier ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die zweiten Potenzen homologer Seiten.

6. Bemerkung. Die Sätze 4 und 5 finden Verwendung bei der Lösung von Aufgaben über Verwandlung und Teilung der Dreiecke.

§ 106. Die Berechnung von Inhalten.

1. Die Flächeneinheit ist dasjenige Quadrat, dessen Seite eine Längeneinheit misst. Den Inhalt einer Figur ermitteln heisst angeben, wie oft die Flächeneinheit in ihr enthalten ist. Hierbei kann eine rationale oder irrationale Masszahl gefunden werden.

2. Ist F der Inhalt eines Rechtecks mit der Grundseite g und der Höhe h, so verhält sich F zur Flächeneinheit wie $g \cdot h : 1 \cdot 1$; woraus $F = g \cdot h$ folgt. D. h.: Der Inhalt eines Rechtecks ist gleich dem Produkt zweier anstossender Seiten (eigentlich: Produkt der Masszahlen zweier etc.)

3. Der Inhalt eines Quadrats von der Seite a ist gleich der zweiten Potenz der Seite a, gleich a^2.

4. Bemerkung. Das Produkt zweier Strecken kann hiernach immer als Inhalt eines Rechtecks, und die zweite Potenz einer Strecke immer als Inhalt eines Quadrats gedeutet werden. Darauf beruht die in § 80 gewählte Bezeichnungsweise.

5. Das Ergebnis der Nr. 2 in Verbindung mit § 105, 3 liefert die Sätze: a) Der Inhalt eines Parallelogramms ist gleich dem Produkt aus Grundseite und Höhe. a) Der Inhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt aus Grundseite und Höhe.

6. Da jedes Trapez durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerfällt, so ist sein Inhalt gleich dem Produkt aus der Höhe und der halben Summe der Grundseiten.

7. Verbindet man im regulären n-Eck das Zentrum mit den Ecken, so erhält man n kongruente Dreiecke. Ist nun a die Seite des Vielecks, ϱ ihre Entfernung

vom Zentrum, so ist der Inhalt des Polygons $F = \frac{n \cdot a \cdot \varrho}{2}$.

8. Der Inhalt eines beliebigen Vielecks kann in der Weise gefunden werden, dass man es durch Diagonalen von einer Ecke aus in Dreiecke zerlegt, deren Inhalte man berechnet und addiert. Oder: Man ziehe (am zweckmässigsten) die längste Diagonale und fälle von den übrigen Ecken Lote auf dieselbe. Dadurch zerlegt man die Figur in rechtwinklige Dreiecke und Trapeze. Die Inhalte derselben ermittelt und addiert man.

§ 107. Der Inhalt eines Dreiecks.

In diesem Paragraphen soll der Inhalt F eines Dreiecks gefunden werden, dessen Seiten die Längen a, b, c haben. Um diesen Zweck zu erreichen, ist es notwendig, die Höhe h — Fig. 61 — zu berechnen. In § 81, 1 wurde die Beziehung aufgestellt $c^2 = a^2 + b^2 - 2ap$. Hieraus folgt $p = (a^2 + b^2 - c^2) : 2a$. Nun ist

$$h^2 = b^2 - p^2 = (b + p) \cdot (b - p)$$

$$= \left(b + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right) \cdot \left(b - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)$$

$$= \frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2a} \cdot \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2a}$$

$$= \frac{(a + b)^2 - c^2}{2a} \cdot \frac{c^2 - (a - b)^2}{2a}$$

$$= \frac{(a + b + c) \cdot (a + b - c) \cdot (c + a - b) \cdot (c - a + b)}{4a^2}.$$

Setzt man zur Abkürzung $a + b + c = 2s$, so ist $-a + b + c = 2(s - a)$, $a - b + c = 2(s - b)$, $a + b - c$

$= 2\,(s - c)$. Mithin nimmt obiger Ausdruck folgende Form an:

$$h^2 = \frac{2s \cdot 2\,(s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}{a^2}; \text{ daher}$$

$$ah = 2\sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} \text{ oder}$$

$$\mathbf{F = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}}.$$

§ 108. Uebungen.

1. Die Grundlinie eines Dreiecks ist 4,2 cm, die zugehörige Höhe 3,8 cm. Berechne den Inhalt des Dreiecks.

2. Der Umfang eines Quadrats beträgt 16,48 m. Wie gross ist der Inhalt?

3. Der Umfang eines Rechtecks ist 24,6 m. Eine Seite misst 8,4 m. Bestimme den Inhalt.

4. Die Grundseiten eines Trapezes messen 6,4 cm und 3,8 cm; die Höhe ist gleich 4,2 cm. Berechne den Inhalt.

5. Teile im $\triangle$ ABC die Seite AB in drei gleiche Teile und ziehe durch die Teilpunkte die Parallelen mit BC. Vergleiche die Inhalte der entstandenen Figuren miteinander.

6. Durch den Punkt E, der die Seite AB des $\triangle$ ABC im Verhältnis m : n teilt, wird die Parallele zu BC gezogen. In welchem Verhältnis steht der Inhalt des abgeschnittenen Dreiecks zu dem Inhalt des auftretenden Trapezes?

7. Der Inhalt eines rechtwinkligen Dreiecks ist $^1/_2 \cdot b \cdot c$.

8. Der Inhalt eines gleichseitigen Dreiecks ist $^1/_4 \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}$.

9. Welchen Inhalt hat ein reguläres Sechseck von der Seite 2,4 m?

10. Die Projektionen der Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks auf die Hypotenuse sind 5 cm und

20 cm. Berechne die Katheten, die Höhe und den Inhalt.

11. Der Inhalt eines Rhombus ist 42,84 qm. Die eine Diagonale misst 3,57 m. Wie lang ist die andere?

12. In dem Viereck ABCD wurden von den Ecken B und D die Lote auf die Diagonale AC gefällt. Die Lote messen 5,2 m und 6,4 m, die Diagonale 12,9 m. Ermittle den Inhalt des Vierecks.

13. Berechne den Inhalt des Dreiecks ABC aus $a = 13$ cm, $b = 14$ cm und $c = 15$ cm.

14. Die Inhalte ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate entsprechender Höhen.

15. Die Inhalte ähnlicher Vielecke verhalten sich wie die Quadrate homologer Seiten.

16. Die Inhalte zweier regelmässiger n-Ecke verhalten sich wie die Quadrate entsprechender Strecken.

17. Errichtet man auf den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks als homologe Seiten ähnliche Figuren, so ist die über der Hypotenuse errichtete Figur gleich der Summe der beiden Figuren über den Katheten.

18. In jedem Dreieck ist $r = a \,.\, b \,.\, c : 4\, F$.

19. In jedem Dreieck ist $\varrho = \sqrt{\frac{(s-a)\,.\,(s-b)\,.\,(s-c)}{s}}$;

$\varrho_a = \sqrt{\frac{s\,.\,(s-c)\,.\,(s-b)}{s-a}}$; etc.

20. In jedem Dreieck ist $\varrho \,.\, \varrho_a \,.\, \varrho_b \,.\, \varrho_c = F^2$.

21. Wenn zwei inhaltsgleiche Dreiecke in einem Winkel übereinstimmen, so sind auch die Produkte der diesen Winkel einschliessenden Seiten gleich.

22. Ein gegebenes Dreieck in ein gleichseitiges zu verwandeln.

23. Ebenso in ein rechtwinklig gleichschenkliges.

24. Ebenso in ein gleichschenkliges mit gegebenem Winkel an der Spitze.

25. Das gegebene Dreieck ABC durch Geraden parallel BC in fünf gleiche Teile zu teilen.

26. Zwei ähnliche Vielecke sind gegeben. Es soll ein drittes diesen ähnliches konstruiert werden, das gleich der Summe bezw. der Differenz der beiden ist.

27. Sind a, b, c und d die vier Seiten eines Kreisvierecks und e eine Diagonale, so ist $e = \sqrt{\frac{(ad+bc).(ac+bd)}{ab+cd}}$.

28. Sind a, b, c und d die Seiten eines Kreisvierecks und ist $a+b+c+d = 2s$, so ist dessen Inhalt $F = \sqrt{(s-a).(s-b).(s-c).(s-d)}$.

Anleitung: Man fälle in dem Viereck ABCD von A die Höhe AE auf BC und von C die Höhe CF auf AD; dann ist, wenn AE mit h und BE mit p bezeichnet wird: $ABCD = \frac{ab+cd}{2a} \cdot h$; $p = \frac{a^2+b^2-e^2}{2b}$; $h^2 = a^2 - p^2$, und e gleich dem in Nr. 27 angegebenen Wert.

29. Leite aus diesem Satz die Formel für den Inhalt eines Dreiecks ab.

30. Fällt man von einem Punkt im Innern eines Dreiecks die Lote auf die Seiten, so ist die Summe der drei Verhältnisse aus je einem Lot und der zu ihm parallelen Höhe gleich 1.

---

15. Kapitel.

Die Ausmessung des Kreises.

§ 109. Berechnung regelmässiger Vielecke.

1. Aufgabe. Der Radius r und die Seite s_n des in den Kreis beschriebenen regulären Polygons sind gegeben. Man soll die Seite s_{2n} des einbeschriebenen Vielecks von doppelter Seitenzahl durch Rechnung ermitteln.

Lösung. Fig. 94. Ist BC die Seite des n-Ecks, AE ⊥ BC, so ist EC die Seite des 2 n-Ecks. Im △ EAC ist nach § 81 $s_{2n}^2 = 2r^2 - 2r \cdot AD$. Der Wert für AD ergiebt sich aus dem △ ADC. Man findet $AD = \sqrt{r^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2}$. Somit ist $s_{2n}^2 = 2r^2 - 2r \cdot \sqrt{r^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2}$

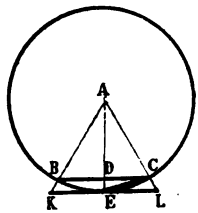


Fig. 94.

$= r^2\left[2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{s_n}{2r}\right)^2}\right]$ oder $s_{2n} = r \cdot \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4r^2}}}$.

2. Zusatz. Die Seite s_6 des regelmässigen 6-Ecks ist $s_6 = r$. Trägt man diesen Wert in die soeben gefundene Formel ein, so erhält man die Seite des 12-Ecks, nämlich $s_{12} = r \cdot \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{1}{4}}} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

Ebenso berechnet man s_{24}, s_{48} etc.

3. Aufgabe. Der Radius r und die Seite s_n des in den Kreis einbeschriebenen regelmässigen n-Ecks sind gegeben. Man soll die Seite S_n des um den Kreis beschriebenen regulären n-Ecks ermitteln.

Lösung. Fig. 94. Ist BC die Seite s_n des einbeschriebenen n-Ecks, AE ⊥ BC, KL ∥ BC, so ist KL die Seite S_n des umbeschriebenen n-Ecks. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ABC und AKL folgt $S_n : s_n = r : AD$. Daher $S_n = r \cdot s_n : AD$. Wie vorhin ist $AD = \sqrt{r^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2}$; folglich $S_n = r \cdot s_n : \sqrt{r^2 - \frac{s_n^2}{4}}$

$= s_n : \sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4r^2}}$.

4. Zusatz. Diese Formel liefert für $s_6 = r$ den Wert $S_6 = r : \sqrt{1 - {}^1/_4} = 2r : \sqrt{3}$; für $s_{12} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ den Wert $S_{12} = 2r\,(2 - \sqrt{3})$ u. s. w.

110. Die Rektifikation des Kreises.

1. Die Aufgabe, einen Kreis zu rektifizieren, d. h. eine Strecke von der gleichen Länge wie die Peripherie eines Kreises zu finden, kann, wie Lindemann 1882 gezeigt hat, durch eine planimetrische Konstruktion nicht gelöst werden. Demnach erledigt man die Rektifikation annäherungsweise und zwar sowohl durch Rechnung als auch durch Konstruktion.

a) Durch Rechnung:

2. Kreise sind ähnliche Figuren. Die Umfänge ähnlicher Figuren verhalten sich wie zwei homologe Strecken. Daher ist das Verhältnis der Umfänge P und P′ zweier Kreise gleich demjenigen ihrer Durchmesser d und d′. D. h.: $P : P' = d : d'$ oder $P : d = P' : d'$. In Worten:

In allen Kreisen ist das Verhältnis der Peripherie zum Durchmesser unveränderlich.

Diese konstante Verhältniszahl wird mit π bezeichnet (π das griechische p, Peripherie).

3. Es ist einleuchtend, dass der Umfang des einbeschriebenen regulären n-Ecks kleiner und der Umfang des umbeschriebenen regulären n-Ecks grösser als die Peripherie des Kreises ist. Der Fehler, den man begeht, wenn man den Umfang eines der beiden Vielecke als Peripherie des Kreises nimmt, wird um so kleiner, je grösser die Seitenzahl des Polygons genommen wird: Die Peripherie des Kreises ist die gemeinsame Grenze, der sich die Umfänge der ein-

und umbeschriebenen Vielecke bei unbeschränkter Vermehrung der Seitenzahl nähern.

Ausgehend vom regelmässigen 6-Eck lassen sich mittelst des § 109 die Umfänge u und U der ein- bezw. umbeschriebenen 12, 24, 48, 96, 192, 384 . . . Ecke berechnen. Für $r = 1$ kommt

$u_6 = 6{,}00000$	$U_6 = 6{,}92820$
$u_{12} = 6{,}21163$	$U_{12} = 6{,}43078$
$u_{24} = 6{,}26526$	$U_{24} = 6{,}31932$
$u_{48} = 6{,}27870$	$U_{48} = 6{,}29218$
$u_{96} = 6{,}28206$	$U_{96} = 6{,}28542$
$u_{192} = 6{,}28291$	$U_{192} = 6{,}28375$
$u_{384} = 6{,}28311$	$U_{384} = 6{,}28333$

4. Das in Nr. 3 dargelegte Verfahren führt den Namen Exhaustionsmethode. Es liefert das Resultat $\pi = 3{,}1416$. Weil nach Nr. 2 $P : d = \pi$ ist, so erhält man $P = \pi . d = 2 . \pi . r$; d. h.:

Der Umfang eines Kreises ist das πfache des Durchmessers.

5. Der ägyptische Papyrus des Ahmes aus der Zeit 1700—2000 v. Chr. giebt $\pi = (16 : 9)^2 = 3{,}1604$ an. Archimedes (gest. 212 v. Chr.) zeigte, dass π zwischen $3\frac{10}{71}$ und $3\frac{10}{70}$ liege. Die Indier rechneten mit $\pi = 3927 : 1250 = 3{,}1416$. Im 16. Jahrhundert n. Chr. wurde von Vieta π auf 10 Dezimalstellen, von Ludolf van Ceulen auf 35 Dezimalstellen bestimmt; ihm zu Ehren wird π die Ludolfsche Zahl genannt. Ferner fand Adriaan Anthoniszoon für π den Wert 3,1415929. Später wurde π mit Hilfe der höheren Mathematik von Vega auf 140, von Dahse auf 200 und von Richter in Elbing auf 500 Dezimalstellen berechnet. Wie indessen schon oben bemerkt wurde, hat Lindemann bewiesen, dass π keine algebraische,

sondern eine transzendente Zahl ist. Auf 7 Dezimalen genau ist $\pi = 3{,}1415927$; für die meisten Fälle der Praxis ist jedoch $\pi = 3\,{}^1/_7$ oder auch $\pi = 3{,}1416$ hinreichend genau.

b) Durch Konstruktion:

6. Kochansky (1685) hat folgende einfache Lösung gegeben:

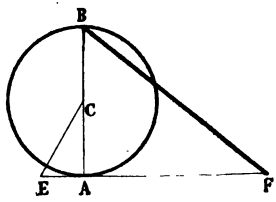


Fig. 95.

Fig. 95. Ziehe in dem Endpunkt A des Durchmessers AB die Tangente an den Kreis C. Sodann lege $\sphericalangle ECA = 30^0$ an; trage von E aus auf der Tangente $EF = 3r$ ab, so ist BF mit grosser Annäherung gleich dem halben Umfang des Kreises; denn eine kurze Rechnung ergiebt für BF den Wert $r \cdot \sqrt{13\,{}^1/_3 - 2\sqrt{3}} = 3{,}1415\,r$.

§ 111. Quadratur des Kreises.

1. Unter der Quadratur des Kreises (des Zirkels) versteht man die Aufgabe, die Fläche des Kreises in eine geradlinige Figur zu verwandeln, etwa in ein Quadrat. Auch diese Aufgabe ist wie die Rektifikation mit Zirkel und Lineal nicht lösbar.

2. Um den Inhalt eines Kreises vom Radius r annäherungsweise zu erhalten, beschreibt man um denselben ein regelmässiges Vieleck. Durch unbeschränkte Vermehrung der Seitenzahl erhält man schliesslich ein Polygon, dessen Umfang und Inhalt der Peripherie und dem Inhalt des Kreises äusserst nahe kommen.

Ersetzt man daher in der § 106, 7 gefundenen Formel $F = {}^1/_2 \cdot n \cdot a \cdot r$ den Umfang na durch $2\pi r$,

so erhält man als Inhalt des Kreises den Ausdruck $F = \pi \cdot r^2$. D. h.:

Der Inhalt des Kreises ist gleich dem Produkt aus der Zahl π und dem Quadrat des Radius.

3. Der Inhalt eines zwischen zwei konzentrischen Kreisen von den Radien R und r gelegenen Ringes ist $\pi(R^2 - r^2)$. — Konstruiere einen Kreis, der mit dem Ring gleichen Inhalt hat.

§ 112. Berechnung der Kreisteile.

1. In einem Kreise vom Radius r sei die Länge eines Bogens mit b, sein zugehöriger Zentriwinkel mit α, der Inhalt des Sektors mit S bezeichnet. Da sich die Bögen eines Kreises wie die zugehörigen Zentriwinkel verhalten, so folgt die Proportion $b : \pi r = \alpha : 180$. Hieraus $b = \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{180}$.

Die Inhalte der Sektoren eines Kreises verhalten sich wie die zugehörigen Bögen oder Zentriwinkel. Somit gilt die Proportion $S : \pi r^2 = b : 2\pi r = \alpha : 360$. Daraus folgt

$$S = \frac{b \cdot r}{2} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{360}.$$

2. Die Fläche eines Segments ist gleich dem Unterschied des zugehörigen Sektors und des durch die Sehne abgeschnittenen Dreiecks.

§ 113. Uebungen.

1. Der Radius eines Kreises ist $r = 6{,}2$ m. Wie gross ist der Umfang, der Inhalt?

2. Der Radius eines Kreises ist $r = 0{,}5$ m, ein Zentriwinkel misst $\alpha = 32°$. Wie gross ist der zugehörige Bogen, Sektor?

3. Der Radius eines Kreises ist $r = 8{,}6$ m. Wie gross ist die Seite des dem Kreise inhaltsgleichen Quadrats?

4. Der Bogen eines Sektors ist gleich dem Radius, wie gross ist der Zentriwinkel?

5. Der Inhalt eines Sektors ist gleich dem Quadrat des Radius, wie gross ist der Zentriwinkel?

6. Die Erde dreht sich um die N.S.-Linie. Welche Geschwindigkeit in der Sekunde hat ein Ort am Aequator? Der Radius der Erde beträgt 6370 km.

7. Zwei gleich grosse Kreise schneiden sich so, dass jeder durch das Zentrum des andern geht. Wie gross ist die gemeinsame Fläche?

8. Drei gleich grosse Kreise berühren sich gegenseitig. Wie gross ist die zwischen den Umfängen liegende Fläche?

9. In einen Kreis vom Radius r ist ein Quadrat beschrieben; über einer Seite wurde der Halbkreis nach aussen gelegt. Wie gross ist die entstandene mondförmige Figur?

10. Einen Kreis zu konstruieren, dessen Umfang gleich ist der Summe oder Differenz der Umfänge zweier Kreise.

11. Einen Kreis zu konstruieren, dessen Inhalt gleich ist der Summe oder Differenz der Inhalte zweier Kreise.

12. Eine gegebene Kreisfläche durch den konzentrischen Kreis zu halbieren.

13. Einen gegebenen Sektor durch den konzentrischen Kreisbogen zu halbieren.

14. Errichtet man über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks nach derselben Seite Halbkreise, so ist die Summe der beiden mondförmigen Figuren gleich dem gegebenen Dreieck. (Lunulae Hippocratis, 450 v. Chr.)

15. Zieht man in einem Kreise zwei zu einander senkrechte sich schneidende Sehnen und beschreibt man über den 4 Abschnitten als Durchmesser Kreise, so ist die Summe der 4 Kreise gleich dem Inhalt des gegebenen Kreises (§ 72, 2).

16. ABCD ist ein Rechteck, in dem $BC = 2\,AB$ ist, F und E sind die Mitten der BC und AD; G ist der Schnitt von AF und BE; H ist der Schnitt der EC und DF. Um F wird ein Kreisbogen durch A, D gelegt; ebenso um E durch B, C; um G durch A, B; um H durch C, D. Wie gross ist das entstandene Oval, wenn $BC = 2a$ ist?

17. In dem Kreise O sind die beiden senkrechten Durchmesser AB und CD sowie die Sekanten AD und BD gezogen. Um B beschreibt man einen Bogen durch A, der BD in E schneidet, ebenso aus A mit Radius AB, welcher AD in F trifft. Das Oval vervollständigt man durch einen Bogen aus D mit DE. Wie gross ist der Inhalt der Eilinie?

18. Die Seite des einem Kreise vom Radius r einbeschriebenen regulären 4, 6, 10-Ecks ist $r\sqrt{2}$, r, $\frac{1}{2}r\,.\,(\sqrt{5}-1)$.

19. Berechne die Seite des einem Kreis vom Radius r einbeschriebenen regulären 8, 16, 32, 12, 24, 48, 96, 20, 40, 80-Ecks.

20. Die Seite des einem Kreis vom Radius r einbeschriebenen regulären 5-Ecks ist $\frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

III. Abschnitt.

Die geometrische Aufgabe.

16. Kapitel.

Wesen und Behandlung der Aufgabe.

§ 114. Einführung.

1. Die geometrische Konstruktionsaufgabe verlangt eine Figur herzustellen, die gegebenen Bedingungen genügt. Dadurch wird zugleich aus den gegebenen Bestimmungsstücken die Grösse oder Lage anderer Stücke abgeleitet. Zur Konstruktion darf nur die Gerade und der Kreis angewendet werden, woher es kommt, dass scheinbar einfache Aufgaben nicht gelöst werden können, wie z. B. die Dreiteilung des Winkels. Die Bestimmungsstücke müssen voneinander unabhängig sein.

2. Die Aufgabe ist bestimmt, wenn ihre Auflösung nur ein oder eine endliche Anzahl von Resultaten ergiebt; unbestimmt, wenn die Zahl der Resultate unendlich ist; überbestimmt, wenn mehr Bestimmungsstücke gegeben sind, als die Konstruktion verlangt; unmöglich, wenn die gegebenen Bedingungen den Eigenschaften der verlangten Figur widersprechen.

§ 115. Teile der Auflösung.

Die vollständige Lösung einer Aufgabe gliedert sich in vier Teile: Analysis, Konstruktion, Beweis, Determination.

1. Analysis. Man zeichnet eine Figur von derselben Art wie die gesuchte, bezeichnet und stellt in ihr die Stücke dar, die den gegebenen entsprechen. Hierauf untersucht man, in welcher Beziehung die gegebenen Stücke unter sich und zu andern Stücken der Figur stehen. Die Untersuchung wird soweit fortgeführt, bis die Abhängigkeiten zwischen allen erforderlichen Elementen aufgedeckt sind; dann aber hat das Verfahren auf eine oder mehrere Aufgaben geführt, die gelöst werden können.

2. Die Konstruktion folgt der Analysis Schritt für Schritt, indem sie die einzelnen Elemente der Figur in der Weise erzeugt, wie sie die Analysis als voneinander abhängig festgestellt hat. Während jedoch die Analysis nicht auf die gegebene Grösse der Bestimmungsstücke Rücksicht nimmt, muss die Konstruktion davon ausgehen. Auch sei darauf hingewiesen, dass jede Konstruktion soweit wie irgend thunlich in einer einzigen Figur zu leisten ist.

3. Der Beweis thut dar, dass die durch die Konstruktion hergestellte Figur den Bedingungen der Aufgabe genügt; er geht somit den umgekehrten Gang der Analysis. Hierbei zeigt sich, dass der Beweis oft die Umkehrungen derjenigen Sätze notwendig hat, welche die Analysis zu ihrer Entwickelung bedurfte.

4. Die Determination untersucht die Möglichkeit und Bestimmtheit der Aufgabe.

§ 116. Methoden der Lösung.

Diese sind die Methode der geometrischen Oerter, der Parallelverschiebung, der Umklappung, der Drehung und der Rechnung. Andere in der Regel einfachere Hilfsmittel, wie sie die Kongruenz, die Symmetrie, die Aehnlichkeit der Figuren und manche Lehrsätze bieten, sind in den früheren Paragraphen angeführt worden und finden deswegen hier keine Berücksichtigung mehr.

§ 117. Die Methode der Oerter.

Dieses Verfahren setzt eine grössere Zahl von Oertern voraus; es ist daher vor allem notwendig, solche, soweit es nicht schon früher geschehen ist, anzuführen.

1. Der geometrische Ort für (D. g. O. f.) den einen Endpunkt einer konstanten Strecke, die immer in gleicher Weise eine gegebene Gerade unter einem gegebenen Winkel schneidet, ist eine Parallele zur Geraden.

2. D. g. O. f. das Zentrum X aller Kreise vom Radius r, welche aus einer gegebenen Geraden immer in gleicher Weise eine Strecke von vorgeschriebener Länge ausschneiden, ist eine Parallele zur Geraden. — Ist AB eine solche Strecke, so lässt sich das $\triangle$ ABX in irgend einer Lage zeichnen.

3. D. g. O. f. den Mittelpunkt X aller Kreise vom Radius r, die den gegebenen Kreis O immer in gleicher Weise nach einer Sehne von gegebener Länge schneiden, ist ein mit dem gegebenen Kreise O konzentrischer. — Ist AB eine solche Sehne, so lässt sich das Viereck OAXB in irgend einer Lage konstruieren.

4. D. g. O. f. den Punkt X, von dem aus man Tangenten von gegebener Länge an den gegebenen Kreis O legen kann, ist ein konzentrischer Kreis. — Ist XA eine Tangente, so lässt sich $\triangle$ XAO in irgend einer Lage herstellen.

5. D. g. O. f. den Punkt X, von dem aus der gegebene Kreis O unter dem gegebenen Winkel α erscheint, ist ein konzentrischer Kreis. — Ist XA eine Tangente, so ist $\triangle$ OAX bestimmt.

6. D. g. O. f. den Punkt X, von welchem aus zwei gegebene Kreise O und Q unter gleichen Winkeln erscheinen, ist ein Kreis. — Zieht man an den Kreis O die Tangente XA, an den Kreis Q die Tangente XB, so ist $\triangle$ OAX $\sim$ QBX, somit XO : XQ = OA : QB. Das weitere nach § 90.

7. Zieht man in dem Kreise O durch den Peripheriepunkt A alle Sehnen, so ist d. g. O. f. deren Mitte der Kreis über OA als Durchmesser.

8. Zieht man durch den Punkt A an den Kreis O alle Sekanten, so ist d. g. O. f. den Mittelpunkt X der Sekanten ein Kreis. — Ist AB eine Sekante, und zieht man OB, wie auch durch X die Parallele zu OB, welche OA in Q schneidet, so ist Q die Mitte der AO und QX = $^1/_2$ OB.

9. Legt man um das $\triangle$ ABC den Umkreis, halbiert man ferner den Bogen BC in E und beschreibt um E mit EB den Kreis, so ist dieser der g. O. f. das Zentrum X aller Inkreise derjenigen Dreiecke, die auf BC stehen und ihre Spitze auf dem Bogen BAC haben. — Es ist nämlich $\triangle$ BEX gleichschenklig, da $\sphericalangle$ EBX = BXE = $\frac{\alpha+\beta}{2}$ ist.

10. D. g. O. f. den Punkt X, dessen Summe der Entfernungen von den Schenkeln eines Winkels C die gegebene Länge s hat, ist eine Gerade. — Sind XA und XB zwei Lote, verlängert man AX und halbiert man den Winkel, den diese Verlängerung mit XB bildet, so ist die Halbierungslinie der Ort, wie man sich durch Umklappen der BX um die Mediane überzeugt.

11. Zieht man von dem gegebenen Punkte A alle Strecken nach der Geraden L, so ist d. g. O. f. den Punkt X, der die Strecken in gleicher Weise im Verhältnis m : n teilt, eine Parallele zu L.

12. Zieht man durch den Punkt A alle Sekanten an den gegebenen Kreis O und teilt sie in gleicher Weise im Verhältnis m : n, so ist d. g. O. f. den Teilungspunkt X ein Kreis. — Dieser wird analog dem in Nr. 8 gefunden. — Der Punkt A kann auch innerhalb des Kreises liegen.

13. D. g. O. des Punktes X, der zu den Punkten A, B so liegt, dass $AX^2 - BX^2 = d^2$ wird, ist eine Gerade. — Bestimmt man nämlich auf AB den Punkt C so, dass $AC^2 - BC^2 = d^2$ ist, und errichtet man in C das Lot auf AB, so ist dieses der Ort.

14. D. g. O. f. den Punkt X, von dem aus die Tangenten an die gegebenen Kreise O, Q mit den Radien r, ϱ einander gleich sind, ist eine Gerade senkrecht zu OQ. — Denn es ist $XO^2 - XQ^2 = r^2 - \varrho^2$. — Beschreibt man um X mit der Länge der betreffenden Tangente den Kreis, so schneidet dieser die beiden Kreise rechtwinklig. Daher:

15. D. g. O. f. den Mittelpunkt aller Kreise, die zwei gegebene Kreise rechtwinklig schneiden, ist eine Gerade.

16. D. g. O. f. das Zentrum X aller Kreise, die durch den gegebenen Punkt A gehen und den gegebenen Kreis O vom Radius r halbieren, ist eine Gerade. — Denn es ist $AX^2 - XO^2 = r^2$.

17. D. g. O. f. den Mittelpunkt X aller Kreise, die zwei gegebene Kreise O und Q mit den Radien r und ϱ halbieren, ist eine Gerade. — Denn man hat $XO^2 - XQ^2 = \varrho^2 - r^2$.

18. D. g. O. f. das Zentrum X aller Kreise, die den gegebenen Kreis O vom Radius r rechtwinklig schneiden und den gegebenen Kreis Q vom Radius ϱ halbieren, ist eine Gerade. — Es ist $XO^2 - XQ^2 = r^2 + \varrho^2$.

19. D. g. O. f. den Punkt X von solcher Lage zu zwei gegebenen Punkten A, B, dass $AX^2 + BX^2 = s^2$ werde, ist ein Kreis. — Ist nämlich $XA = x$, $XB = y$, $AB = c$, ferner C die Mitte von AB, $CX = z$, so besteht die Beziehung $c^2 + 4z^2 = 2x^2 + 2y^2 = 2s^2$; hieraus $z^2 = \frac{1}{4}(2s^2 - c^2)$. Demnach ist der Ort der um C mit $\frac{1}{2}\sqrt{2s^2 - c^2}$ beschriebene Kreis.

20. D. g. O. f. das Zentrum X aller Kreise, die von dem gegebenen Kreise O vom Radius r rechtwinklig geschnitten und dem gegebenen Kreise Q (Radius ϱ) halbiert werden, ist ein Kreis. — Denn $XO^2 + XQ^2 = r^2 + \varrho^2$.

21. D. g. O. f. den Mittelpunkt X aller Kreise, welche durch den gegebenen Punkt A gehen und von dem gegebenen Kreis O (Radius r) halbiert werden, ist ein Kreis. Denn $XA^2 + XO^2 = r^2$.

22. D. g. O. f. das Zentrum aller Kreise, die den gegebenen Kreis O vom Radius r halbieren und von dem gegebenen Kreis Q (Radius ϱ) halbiert werden, ist ein Kreis. — Denn $XO^2 + XQ^2 = \varrho^2 - r^2$.

23. Zieht man von dem Punkte A nach der Geraden L irgend eine Strecke AB und bestimmt auf ihr den Punkt X so, dass $AX \cdot AB = a^2$ wird, so beschreibt der Punkt X einen Kreis, wenn sich AB um A dreht.

24. Zieht man durch den Peripheriepunkt A eines Kreises irgend eine Sehne (Sekante) AB und bestimmt auf ihr den Punkt X so, dass $AX \cdot AB = a^2$ wird, so beschreibt X eine Gerade, wenn sich AB um A dreht.

25. Zieht man durch den Punkt A nach dem Kreise O eine Sekante AB und bestimmt auf ihr den Punkt X so, dass $AX \cdot AB = a^2$ wird, so beschreibt X einen Kreis, wenn sich AB um A dreht. (A ist ein Aehnlichkeitspunkt beider Kreise.)

§ 118. Anwendung.

Um eine geometrische Konstruktionsaufgabe mittelst der Methode der Oerter zu lösen, geht man von zwei oder mehreren der Lage nach vorhandenen Elementen (Punkten, Linien) aus und bestimmt für jeden unbekannten Punkt zwei Ortslinien, indem man jede der beiden Bedingungen, welche der Punkt erfüllen soll, für sich betrachtet. Jede Bedingung liefert einen Ort und der gesuchte Punkt liegt da, wo sich die beiden Oerter schneiden.

1. Beispiel. Auf der gegebenen Geraden L den Punkt X zu finden, von dem die an den gegebenen Kreis O gezogene Tangente die Länge a erreicht.

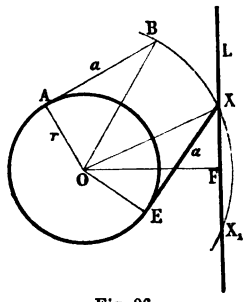


Fig. 96.

Analysis. Fig. 96. Es sei X der gesuchte Punkt, so dass die Tangente XE = a wird. Wie aus dem Text der Aufgabe hervorgeht, muss der Punkt X zweien Bedingungen gehorchen; 1) er muss auf L liegen, 2) muss er eine solche Lage haben, dass die von ihm an den Kreis O gelegte Tangente die Länge a erreicht. Die beiden Ortslinien für X sind somit 1) die Linie L, 2) der in § 117, 4 angeführte konzentrische Kreis. Die Schnittpunkte beider Oerter genügen der Aufgabe.

Konstruktion. Ziehe den Radius OA, errichte in A auf OA das Lot AB = a und verbinde B mit O. Beschreibe um O mit OB den Kreis, der die L in X schneidet.

Beweis. Ziehe von X an den Kreis die Tangente XE und verbinde O mit E und X. Da nun OX = OB, OE = OA, $\sphericalangle$ E = A = 1 R ist, so ist $\triangle$ XOE $\cong$ BOA, woraus XE = AB folgt. Es ist jedoch AB = a, daher auch XE = a und Tangente. Auch liegt X auf L. Mithin genügt X allen Anforderungen der Aufgabe.

Determination. Fälle OF $\perp$ L. Mit Hilfe des Pythagoreischen Lehrsatzes ergiebt sich $OB = \sqrt{a^2 + r^2}$; wenn nun $\sqrt{a^2 + r^2} \gtreqless OF$ ist, so hat der konzentrische Kreis mit L $\left.\begin{matrix}2\\1\\0\end{matrix}\right\}$ Punkte gemeinsam, d. h. es giebt 2, 1, 0 Punkte, die der Aufgabe entsprechen.

§ 119. Uebungen.

Bezeichnung: $\odot$ aus L_s, K_s, K_d, P_t, K_{90} heisst, einen Kreis zu beschreiben, der aus L eine Strecke = s, aus dem Kreis K eine Sehne = s ausschneidet, der den K halbiert, der so liegt, dass die vom Punkte P an ihn gelegte Tangente = t werde, der den Kreis K rechtwinklig schneidet.

1. Führe die geometrischen Oerter auf, die in den Abschnitten I und II enthalten sind.

2. Dem $\triangle$ ABC das gleichschenklige $\triangle$ XYZ einzubeschreiben, so dass die Basis XY $\parallel$ BC geht und die Länge a erhält.

3. $\odot$ aus r, A, L'_s.

4. $\odot$ aus r, L_s, P_t.

5. $\odot$ aus r, K, K'_s.

6. $\odot$ aus L, K_d, r.

7. Den Punkt X zu finden, so dass die von ihm an die Kreise O und Q gelegten Tangenten die Längen a und b haben.

8. Den Punkt X zu finden, von dem aus die Kreise O und Q unter den Winkeln α und β erscheinen.

9. Den Punkt X zu finden, von dem aus drei gegebene Kreise unter gleichen Winkeln erscheinen.

10. $\triangle$ aus r, a, t_b.

11. $\triangle$ aus a, α, t_b.

12. Durch den Punkt A eine den Kreis O in X und Y schneidende Sekante so zu ziehen, dass AX = XY wird.

13. Desgleichen, dass AX : AY = m : n wird.

14. Rechtwinkliges Dreieck aus a, ϱ.

15. $\triangle$ aus p, q, b : c = m : n.

16. In einem Viereck einen Punkt zu finden, der von den Seiten a und b das Entfernungsverhältnis m : n und von den Seiten c und d die Summe der Entfernungen s hat.

17. Auf dem Umfang des Kreises O ist der Punkt A gegeben. Man soll durch A eine Gerade ziehen, welche

den Kreis in X und die gegebene Linie L in Y so schneidet, dass $AX = XY$ wird.

18. Desgleichen, dass $AX : AY = m : n$ wird.

19. Durch den innerhalb des gegebenen Kreises O gelegenen Punkt A die Sehne XAY so zu ziehen, dass $AX : AY = m : n$ wird.

20. Rechtwinkliges Dreieck aus a, $b^2 - c^2 = d^2$.

21. $\triangle$ aus a, t_a, $b^2 - c^2 = d^2$.

22. $\triangle$ aus a, $b^2 - c^2 = d^2$, F (Inhalt).

23. $\triangle$ aus a, α, $b^2 - c^2 = d^2$.

24. Den Punkt X zu finden, so dass die von ihm an drei gegebene Kreise gezogenen Tangenten einander gleich werden.

25. $\odot$ aus K_{90}, K'_{90}, K''_{90}; 26. $\odot$ aus A, B, K_d.

27. $\odot$ aus K_d, K'_d, K''_d.

28. $\odot$ aus K_{90}, K'_{90}, K''_d.

29. $\odot$ aus K_{90}, K'_d, K''_d.

30. $\triangle$ aus a, α, $b^2 + c^2 = s^2$.

31. $\triangle$ aus a, h_a, $b^2 + c^2 = s^2$.

32. Einen Kreis zu konstruieren, der von zwei gegebenen Kreisen rechtwinklig geschnitten und von einem dritten gegebenen Kreis halbiert wird.

33. $\odot$ aus A und B und der von einem gegebenen Kreis halbiert wird.

34. $\odot$ aus K_d, K'_d und der von K'' halbiert wird.

35. Durch den Punkt A eine Gerade zu ziehen, die den Kreis O in Y, die Gerade L in X so schneidet, dass $AX \cdot AY = a^2$ wird.

36. Durch den Schnittpunkt A zweier Kreise die Sekante XAY so zu legen, dass $AX \cdot AY = a^2$ wird.

37. Durch den Punkt A eine Gerade zu ziehen, welche den Kreis O in X, den Kreis Q in Y so schneidet, dass $AX \cdot AY = \frac{1}{2}a^2$ wird.

38. Gegeben sind die festliegenden Strecken AB und CD und die Gerade L. Auf L den Punkt X zu finden, so dass $\triangle ABX = CDX$ wird.

39. In dem $\triangle ABC$ den Punkt X zu finden, so dass $\triangle BCX : CAX : ABX = m : n : p$ sich verhält.

40. Auf der Geraden L liegen die Strecken AB, BC und CD hintereinander. Man soll den Punkt X finden, so dass von ihm aus die drei Strecken unter gleichen Winkeln erscheinen.

41. Ein Quadrat zu zeichnen, dessen Seiten durch vier gegebene Punkte gehen.

42. Ein rechtwinkliges Dreieck von gegebener Höhe zu konstruieren, dessen Seiten durch vier gegebene Punkte gehen sollen, wovon zwei auf der Hypotenuse liegen.

43. In einen Kreis ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, dessen Katheten durch zwei gegebene Punkte gehen.

§ 120. Die Methode der Parallelverschiebung.

Das Wesen dieser Methode besteht darin, dass man einzelne Teile der Gesamtfigur wie Strecken, Linien, Kreise, Linienzüge u. s. w. parallel einer Geraden um eine bestimmte Strecke verschiebt. Der Zweck einer solchen Verschiebung ist die Auffindung eines wichtigen Punktes, das Zusammenrücken gegebener Strecken zu einer Figur, welche sich konstruieren lässt, Zerlegung einer Figur in Teile, die sich einzeln herstellen lassen. Uebertragung von Verhältnissen.

1. Beispiel. $\triangle$ aus t_b, t_c, h_a.

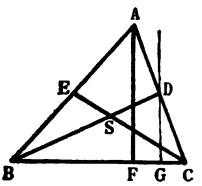


Fig. 97.

Analysis. Es ist — Fig. 97 — ABC ein Dreieck, in dem $BD = t_b$, $CE = t_c$, $AF = h_a$ sei. Verschiebt man AF längs BC, bis sie durch D geht, wobei $DG = {}^1/_2\, h_a$ wird, so lässt sich das rechtwinklige $\triangle$ BDG zeichnen aus $BD = t_b$, $GD = {}^1/_2\, h_a$ und $\sphericalangle BGD = 1$ R. Der Punkt S auf BD teilt diese Strecke im Verhältnis 2 : 1. Die beiden Oerter für den Punkt C sind a) die Linie BG, b) der

um S mit $^2/_3$ t_c beschriebene Kreis. Die Punkte C und D bestimmen die Lage von A, da DA = CD sein muss.

2. Beispiel. Viereck aus a, c, e, f, ∢ ef.

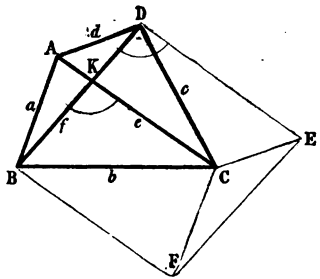


Fig. 98.

Analysis. In dem Viereck ABCD, Fig. 98, sei AB = a, CD = c, AC = e, BD = f, ∢ BKC = ∢ ef. Verschiebe △ ADB parallel AC und um diese Strecke. Hierdurch gelangt D nach E, A nach C, B nach F und es ist CE ∥ AD, CF ∥ AB, EF ∥ BD, ∢ BDE = BKC. Das Parallelogramm BDEF lässt sich nun herstellen aus BD = f, DE = e, ∢ BDE = ∢ ef. Der Punkt C liegt auf dem um F mit a und auf dem um D mit c beschriebenen Kreise. Da CA ∥ ED ist, so lässt sich A von C aus auffinden.

3. Beispiel. Zwischen zwei gegebene Kreislinien die Strecke XY = a und parallel zur Zentrale zu legen.

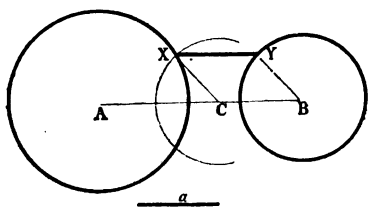


Fig. 99.

Analysis. In Fig. 99 seien A, B die Zentren der gegebenen Kreise, XY = a und ∥ AB. Die Linie XY lässt sich ziehen, wenn der Punkt X gefunden ist. Verschiebt man aber den Kreis B längs BA um a bis C, so muss sein Umfang durch X gehen. In dieser neuen Lage lässt sich der Kreis zeichnen, da BC = a sein muss.

Konstruktion. Mache $BC = a$, beschreibe um C mit dem Radius des Kreises B einen Bogen, der den Kreis A in X schneidet; ziehe $XY \parallel AB$.

4. Beispiel. An den Bogen des Sektors O die Tangente zu legen, so dass ihre von dem Berührungspunkte einerseits und den verlängerten Radien andererseits begrenzten Abschnitte sich wie $m : n$ verhalten.

Analysis. In Fig. 100 entspreche BC den Forderungen. Ziehe OA, welche Linie auf BC senkrecht stehen muss. Bringt man jetzt BC durch Parallelverschiebung in die Lage EG, so verhält sich auch $EF : FG = m : n$; wenn ferner $FH \parallel CO$ ist, so erhält man $EH : HO = m : n$. Die Verschiebung der BC kann immer soweit vorgenommen werden, dass $EH = m$ und $HO = n$ wird. Die beiden Oerter für F sind alsdann a) der Halbkreis über EO als Durchmesser und b) die Parallele durch H zu OC. Die Gerade OF bestimmt auf dem Bogen den Punkt A und die gesuchte Linie BC ist senkrecht in A auf OA.

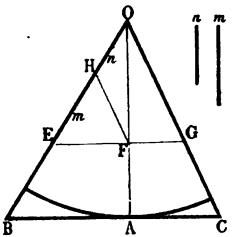


Fig. 100.

Konstruktion. Mache $OH = n$, $HE = m$; schlage über OE als Durchmesser den Halbkreis, der die durch H zu OC gezogene Parallele in F schneidet. Die verlängerte OF trifft den Bogen in A; errichte in A auf OA das Lot BC.

§ 121. Uebungen.

1. $\triangle$ aus a, c, t_b; 2. $\triangle$ aus t_a, h_b, h_c; 3. $\triangle$ aus t_a, h_a, α.

4. $\triangle$ aus t_a, t_b, t_c; 5. $\triangle$ aus t_a, α, $b + c$.

6. Gleichschenkliges Dreieck aus h_b, ϱ.

7. Trapez aus b, d, e, f; 8. Trapez aus b, d, e, $\sphericalangle$ ef.

9. Trapez aus b, c, d, $\sphericalangle$ ef.

10. Viereck aus e, f, β, δ, $\sphericalangle$ ef; 11. Viereck aus a, b, c, d, $\sphericalangle$ ac.

12. Viereck aus den vier Seiten und der Verbindungsstrecke zweier Gegenseiten.

13. Durch den einen Schnittpunkt zweier sich schneidender Kreise eine Sekante zu ziehen, so dass die Summe beider Sehnen = s werde.

14. Ein Rechteck zu konstruieren, von dem eine Seite gegeben ist, und dessen vier Seiten durch vier gegebene Punkte gehen.

15. In einem Kreise ist ein Durchmesser gezogen. Auf dem einen Halbkreis liegen die Punkte A, B. Auf dem andern den Punkt X so zu bestimmen, dass AX und BX aus dem Durchmesser ein Stück = a ausschneiden.

16. In dem $\triangle$ ABC eine die AB in X, die AC in Y schneidende Linie XY so zu ziehen, dass XY = a und BX : CY = m : n werde.

17. Desgleichen, dass BX = XY = YC werde.

18. Gegeben sind die Strahlen AB und CD mit den Endpunkten A und C. Man sucht zwei sich berührende Kreisbögen von gleichen Radien, wovon der eine AB in A, der andere CD in C tangiert.

19. In dem $\triangle$ ABC eine die AB in X, die AC in Y schneidende Linie XY $\parallel$ BC so zu ziehen, dass BX : XY = XY : CY wird.

20. Desgleichen, dass AX : XY = XY : CY wird.

21. Desgleichen, dass AX : XY = XY : BX wird.

22. Durch den Punkt A eine Linie so zu ziehen, dass die beiden Abschnitte, welche dieselbe zwischen einen Dreistrahl legt, sich wie m : n verhalten.

23. Einen Dreistrahl durch eine Gerade so zu schneiden, dass die beiden Abschnitte = a, b werden.

24. $\odot$ aus A auf L, K.

25. $\odot$ aus A auf K, K'.

26. $\odot$ aus L, L', K.

27. $\odot$ aus L, K, K'; 28. $\odot$ aus K, K, K'.

§ 122. Die Methode der Umklappung.

Die Methode der Umklappung leitet sich aus der axialen Symmetrie ab. Will man sie zur Lösung von Aufgaben verwenden, so klappt man die ganze oder einen Teil der zur Analysis notwendigen Figur um eine Gerade um. Letztere kann entweder schon vorhanden sein, oder sie muss erst eingeführt werden. Am häufigsten benützt man dazu eine Winkelhalbierende oder eine Senkrechte. Der Zweck dieses Verfahrens ist aber, gegebene Stücke zusammenzurücken, gleiche Elemente zur Deckung zu bringen, Punkte durch symmetrische zu ersetzen, Summen bezw. Differenzen von Strecken und Winkeln darzustellen.

1. Beispiel. $\triangle$ aus b, c, $\beta - \gamma$.

Analysis. In Fig. 101 ist ABC ein Dreieck, in welchem $AC = b$, $AB = c$, $\sphericalangle B - C = \beta - \gamma$ sei. Um die Differenz $\sphericalangle B - C$ einzuführen, zieht man $AD \perp BC$ und klappt $\triangle ABD$ um $\overline{AD}$ in die Lage ADE um. Hierdurch wird $\sphericalangle AEB = \beta$. Aber $\sphericalangle AEB = \delta + \gamma$, folglich ist $\sphericalangle \delta = \beta - \gamma$. Das $\triangle AEC$ ist demnach bestimmt aus $AC = b$, $AE = c$, $\sphericalangle \delta = \beta - \gamma$. Der Punkt D liegt auf CE und auf dem Lote von A auf CE. Der Punkt B liegt auf CE und auf einem Kreise um D mit DE.

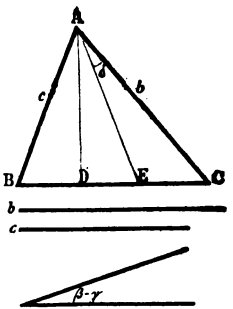


Fig. 101.

Bemerkung. Zu einer andern Lösung gelangt man, wenn das $\triangle ABC$ um das Mittellot der BC umgewendet wird.

2. Beispiel. In einen gegebenen Kreis ein Viereck zu beschreiben, von welchem zwei Gegenseiten und das Verhältnis der beiden andern gegeben sind.

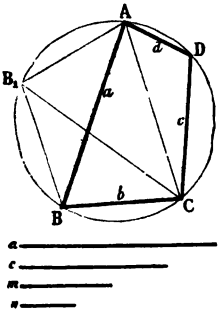


Fig. 102.

Analysis. In Fig. 102 sei ABCD ein Sehnenviereck, in dem AB = a, CD = c, BC : AD = m : n gegeben ist. Klappt man △ ABC um das Mittellot der AC um, wodurch es in die Lage CB'A kommt, so lässt sich △ B'CD in den Kreis legen, da B'C = a und CD = c werden muss. Ferner verhält sich B'A : AD = b : d = m : n, daher liegt A auf dem Apollonischen Kreis, dessen Durchmesser die Strecke zwischen den Teilpunkten ist, welche B'D im Verhältnis m : n teilen. Der Punkt B befindet sich auf dem gegebenen Kreise und auf der Parallele durch B' zu AC.

3. Beispiel. Gegeben sind die Geraden L, L' und auf L der Punkt A. Auf derselben Geraden den Punkt X so zu bestimmen, dass XA gleich dem Abstande der L' von X werde.

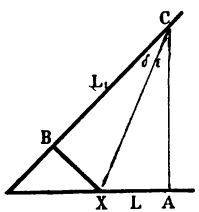


Fig. 103.

Analysis. In Fig. 103 sind L, L', A die gegebenen Elemente, sodann sei das Lot XB = AX. Wendet man die Gerade L' samt dem Lote XB um die Mediane XC des ∢ BXA um, so legt sich BX auf AX, die Gerade L' auf das von C auf L gefällte Lot und ∢ BCX auf ACX; mithin ist ∢ d = ε. Das Lot in A auf L bestimmt zunächst auf L' den Punkt C und die Halbierungslinie des ∢ ACB schneidet die L in X.

4. Beispiel. Von dem Rechteck ABCD — Fig. 104 — ein ihm ähnliches durch eine Gerade parallel zu einer Seite abzuschneiden.

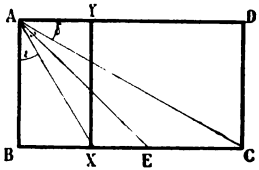


Fig. 104.

Analysis. Es sei $XY \parallel BA$ so gezogen, dass $ABCD \sim AYXB$ ist. Klappt man $\sphericalangle DAC$ um die Mediane AE des rechten Winkels DAB um, so wird der Schenkel AD längs AB fallen; ferner muss der Schenkel AC in die Richtung der AX zu liegen kommen, weil entsprechende Diagonalen die beiden Rechtecke in paarweis ähnliche Dreiecke zerlegen, und in ähnlichen Dreiecken homologe Winkel gleich sind. Weil demnach $\sphericalangle \varepsilon = \delta$ werden muss, so ist die Lage der AX und folglich auch der Punkt X bestimmt. XY ist parallel zu BA.

§ 123. Uebungen.

1. Gleichseitiges $\triangle$ aus $a + h$; 2. Ebenso aus $a - h$.

3. Rechtwinklig gleichschenkliges $\triangle$ aus $a + b$.

4. Rechtwinkliges $\triangle$ aus den beiden Abschnitten der Hypotenuse, in welche letztere durch die Mediane des rechten Winkels zerlegt wird.

5. Desgleichen aus den beiden Abschnitten einer Kathete, in welche diese durch die Mediane des Gegenwinkels geteilt wird.

6. Rechtwinkliges $\triangle$ aus a, $b + c$; 7. Desgleichen aus $b - h$, γ.

8. Desgleichen aus $b + c$, $\beta - \gamma$; 9. Desgleichen aus $b - c$, $\beta - \gamma$.

10. Gleichschenkliges $\triangle$ aus a, $b + h_a$; 11. Desgleichen aus $a + b$, α.

12. $\triangle$ aus $b + c$, a, α; 13. $\triangle$ aus $b - c$, a, α; 14. $\triangle$ aus $a + b + c$, β, γ.

15. $\triangle$ aus $a+b+c$, h_a, α; 16. $\triangle$ aus a, h_b, $\beta-\gamma$; 17. $\triangle$ aus a, $b+c$, h_b.

18. $\triangle$ aus u, v, $b-c$; 19. $\triangle$ aus u, v, γ; 20. $\triangle$ aus $p-q$, h_a, w_a.

21. $\triangle$ aus c, b, $\beta=2\gamma$.

22. Rechteck aus $a+b+c+d$, e.

23. Sehnenviereck aus r, a, c, $b+d$.

24. Viereck aus $a+b+c$, α, β, γ, d.

25. In das $\triangle$ ABC ein Parallelogramm von gegebenem Umfang zu beschreiben, so dass beide Figuren einen Winkel gemeinsam haben.

26. Gegeben L, L', L''. Eine Linie senkrecht L' zu ziehen, so dass die zwischen L und L'' fallende Strecke von L' halbiert werde.

27. Gegeben L, A, K und zwar A und K auf der gleichen Seite der L. Man soll in L den Punkt X finden, so dass XA und die Tangente von X an K mit L gleiche nach entgegengesetzten Seiten geöffnete Winkel bilden.

28. Gegeben L und die Punkte A, B auf verschiedenen Seiten der L. Man soll auf L den Punkt X so bestimmen, dass XB mit L einen doppelt so grossen Winkel als XA bilde. (Beide Winkel sind nach der gleichen Seite geöffnet.)

29. Gegeben L und die Punkte A, B auf der gleichen Seite der L. Gesucht wird auf L der Punkt X, so dass XA und XB mit L zwei nach verschiedenen Seiten geöffnete Winkel von gegebenem Unterschied bilden.

30. Auf dem rechteckigen Billard liegen die Bälle A und B. In welcher Richtung muss A gestossen werden, damit er, nachdem er von jedem Band zurückgeworfen worden, den Ball B trifft.

31. Das Quadrat XYZU zu konstruieren, so dass die Ecken X und Z auf L, die Ecke Y auf L' und die Ecke U auf dem Kreise K liege.

32. Auf dem verlängerten Durchmesser AB des Kreises K liegt der Punkt C. Auf diesem Durchmesser den Punkt X zu finden, so dass XC gleich der von X an K gelegten Tangente werde.

§ 124. Die Methode der Drehung.

1. Die Drehung um einen durch das jeweilige Problem bestimmten Winkel kann vorteilhaft zur Lösung geometrischer Aufgaben verwendet werden. Sind Teile der Gesamtfigur kongruent, so gelangen sie durch Drehung zur Deckung; sind sie aber proportional, ähnlich, so kann man sie durch Drehung in solche Lage bringen, dass das Drehungszentrum Mittelpunkt eines sie tragenden Strahlenbüschels wird. Hierbei ist immer vorausgesetzt, dass die homologen Stücke beider Figuren in gleichem Drehungssinne folgen. Bei der einen Gruppe von Aufgaben ist der Drehungsmittelpunkt gegeben, bei der anderen muss er erst aufgefunden werden. Das Drehungszentrum zweier kongruenter oder ähnlicher Figuren ist dasjenige zweier homologen Strecken. Man wendet das Drehungsverfahren an, um wichtige Punkte zu erhalten: Meistens bestimmt der gedrehte Teil einer Figur mit dem in Ruhe gebliebenen solche Punkte. Die Ermittelung des Mittelpunkts der Drehung liefert oft die Grösse von Winkeln, die zur Konstruktion verwendet werden können.

2. Sind die gleichen Strecken AB, CD gegeben, so wird das Drehungszentrum nach § 36, 2 bestimmt.

3. Wenn die Strecken AB, A'B' ungleich sind — Fig. 105 — so wird das Zentrum, das zugleich Mittelpunkt des sie tragenden Strahlenbüschels werden soll, durch die folgende Ueberlegung gefunden. Es schneide AB die A'B' in D. Wäre nun C das gesuchte Zen-

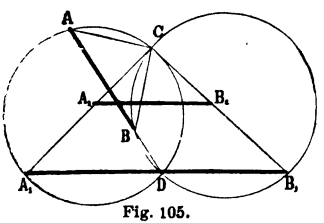


Fig. 105.

trum, so muss $\sphericalangle ACA' = BCB' = ADA'$ sein; mit anderen Worten: C liegt auf den Kreisen AA'D und BB'D, und ist daher der zweite Schnittpunkt beider Kreise. Die neue Lage der AB ist A''B''.

4. Sucht man zu zwei Kreisen O, O' die beiden Schnittpunkte S und S' der äusseren bezw. inneren gemeinsamen Tangenten und wird über SS' als Durchmesser der Kreis beschrieben, so erscheinen von jedem Punkt seines Umfangs die beiden gegebenen Kreise unter gleichen Winkeln. Demnach ist der Kreis über SS' der geometrische Ort des Drehungszentrums beider Kreise. Eine bestimmte Stelle nimmt dieses Zentrum erst ein, wenn dem Punkte A der einen Peripherie der Punkt A' der anderen entsprechen soll. Dann aber wird es nach Nr. 3 ermittelt, und zwar mit Hilfe der Radien OA, O'A'. Für den Fall, dass die Kreise O, O' gleich sind, geht der Ortskreis in das Mittellot auf OO' über.

5. Der Drehungsmittelpunkt für zwei gegenüberliegende Seiten eines Vierecks ist auch derjenige der beiden anderen. Beweis!

§ 125. Aufgaben.

1. Beispiel. Ein gleichseitiges Dreieck zu finden, dessen Ecken auf 3 Parallelen liegen.

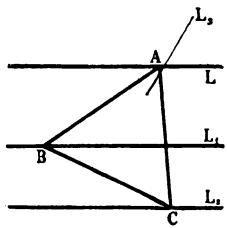


Fig. 106.

Analysis. In Fig. 106 ist $L \parallel L' \parallel L''$ und ABC ein gleichseitiges Dreieck. Da man mit dem Dreieck ABC eine Parallelverschiebung längs der Parallelen vornehmen kann, so darf eine Ecke des $\triangle$ ABC z. B. B nach Gutdünken gewählt werden. Dreht man nun das $\triangle$ ABC um B um 60^0 und nimmt bei dieser

Drehung die Ecke C die Linie L'' mit, so gelangt BC in die Lage BA und L'' nach L'''. Der Punkt A wird demnach durch L und die um 60° gedrehte L'' bestimmt. Der Punkt C liegt auf L'' und zugleich auf einem Kreise um B mit BA.

2. Beispiel. Gegeben sind die gleichen Kreise O, O', auf dem Umfang des einen der Punkt A, auf dem des andern der Punkt A'. Es soll auf der Peripherie des Kreises O der Punkt X, auf derjenigen des Kreises O' der Punkt X' so gefunden werden, dass Bogen $AX = A'X'$ und Strecke $XX' = a$ werde. — Fig. 107. —

Analysis. Man betrachte beide Kreise als kongruente Figuren, in denen sich A und A', O und O, entsprechen. Alsdann sind auch X und X' homolog. Bestimmt man den Drehungsmittelpunkt C beider Kreise, so wird nach der Drehung um C um $\sphericalangle ACA'$ das Gebilde O' mit dem Gebilde O zusammenfallen. Deswegen ist $CX' = CX$, $\sphericalangle XCX' = ACA'$. Das gleichschenklige Dreieck XCX' lässt sich in einer Nebenfigur aus $XX' = a$ und $\sphericalangle XCX' = ACA'$ konstruieren. Die Lösung ergiebt die Länge der Schenkel CX und CX', wodurch man die Punkte X und X' ermitteln kann.

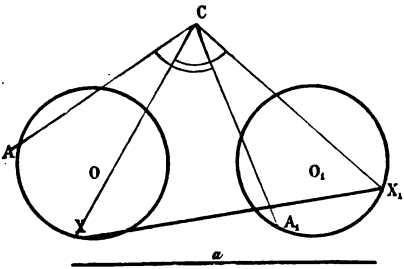


Fig. 107.

3. Beispiel. Auf den Schenkeln des Winkels D liegen die Punkte A, A'; ausserdem ist P gegeben. Man soll durch P eine die Schenkel in X, X' schneidende

Linie so ziehen, dass $AX : A'X' = m : n$ werde. (Aufgabe bei Apollonius: de sectione rationis.)

Analysis. Fig. 108. Es sei XPX' die gesuchte Gerade. Man setze die Strecken AX und $A'X'$ einander entsprechend; dann sind die auf den Schenkeln liegenden Punkte B und B' ebenfalls homolog, wenn man sie so wählt, dass $AB : A'B' = m : n$ ist. Die Punktpaare A und A', B und B' bestimmen den Mittelpunkt C der Drehung. Zieht man ferner CX, CX', CA und CA', so ist $\triangle CAA' \sim CXX'$; folglich ist $\sphericalangle X'XC = A'AC$ und damit liegt X auf einem Kreis über CP, der einen Winkel gleich $A'AC$ fasst.

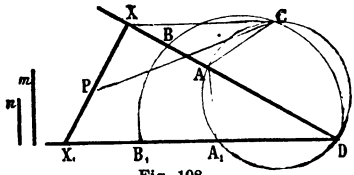


Fig. 108.

§ 126. Uebungen.

1. Gegeben sind der Kreis O, die Gerade L und zwischen beiden der Punkt A. Man soll durch A eine den Kreis in X, die L in X' schneidende Linie so ziehen, dass $AX = AX'$ werde.

2. Desgleichen, dass $AX : AX' = m : n$ werde.

3. In ein Quadrat ein Dreieck zu beschreiben, das einem gegebenen Dreieck ähnlich ist, so dass eine Ecke des Dreiecks in eine Ecke des Quadrats fällt.

4. Ein gleichseitiges Dreieck zu finden, dessen Ecken auf den Umfängen dreier konzentrischer Kreise liegen.

5. Gegeben sind der Punkt P, die Geraden L, L' und $\triangle ABC$. Man soll auf L den Punkt X, auf L' den Punkt Y finden, so dass $\triangle PXY \sim ABC$ werde.

6. Gegeben ist $\triangle ABC$, auf BC der Punkt D. Man soll auf AB den Punkt E, auf AC den Punkt F bestimmen, so dass $\triangle DEF \sim ABC$ werde.

7. Ein gleichseitiges Dreieck zu konstruieren, dessen Ecken auf zwei gegebenen Kreisen liegen und zwar eine in einem gegebenen Punkte.

8. In ein gegebenes Parallelogramm ein Rechteck zu beschreiben, das einem gegebenen Rechteck ähnlich ist.

9. In ein gegeb. Parallelogramm einen Rhombus einzubeschreiben, dessen Diagonalen sich wie m : n verhalten.

10. Ein Kreisviereck aus den vier Seiten zu konstruieren.

11. Auf den Schenkeln des Winkels D liegen die Punkte A, A'. Ausserdem ist Punkt P gegeben. Man soll durch P eine den Schenkel DA in X, den Schenkel DA' in X' schneidende Gerade so ziehen, dass $AX = A'X'$ werde.

12. Desgleichen, dass $AX + A'X' = s$ werde.

13. Gegeben ist der $\sphericalangle$ A und der Punkt P. Man soll durch P eine die Schenkel in B, C schneidende Linie ziehen, so dass das $\triangle$ ABC eine gegebene Fläche hat.

14. Auf den Schenkeln des $\sphericalangle$ A sind die Punkte B, B' gegeben. Man soll eine den Schenkel AB in C, den Schenkel AB' in C' schneidende Linie ziehen, so dass $BC = B'C'$ und $CC' = a$ werde.

15. Desgleichen, dass $BC : B'C' = m : n$ und $CC' = a$ werde.

16. Beschreibt man um die vier Dreiecke, welche von vier einander schneidenden Geraden gebildet werden, die Umkreise, so gehen diese durch einen Punkt. Welche Bedeutung hat dieser Punkt?

17. In jedem Dreieck liegen der Schnittpunkt H der Höhen, der Schnittpunkt S der Transversalen und der Schnittpunkt O der Mittellote auf den Seiten in einer Geraden und zwar ist $HS = 2 . SO$.

§ 127. Die Methode der Rechnung.

1. Um eine planimetrische Konstruktionsaufgabe auf algebraischem Wege zu lösen, sucht man die Länge einer oder mehrerer Strecken auf, mit deren Hilfe sich

die Aufgabe in einfacher, ungezwungener Weise erledigen lässt. Zu diesem Zweck verbindet man die fraglichen Strecken mit anderen in der Aufgabe gegebenen durch Gleichungen, wozu mit Vorteil die Pythagoreischen Sätze, die Lehrsätze über proportionale Strecken, über die Aehnlichkeit und den Inhalt der Figuren u. s. w. Verwendung finden. Alsdann löst man die Gleichungen nach den Unbekannten auf und konstruiert schliesslich diejenigen Strecken, deren Masszahlen gleich den gefundenen Ausdrücken sind. Die gegebenen Strecken oder richtiger ihre Masszahlen, bezogen auf eine und dieselbe Einheit, bezeichnet man mit a, b, c . . . die gesuchten mit x, y, z . . .

Bemerkung. Diejenigen planimetrischen Aufgaben, deren Lösung mit Zirkel und Lineal bewirkt werden kann, führen nur auf Gleichungen ersten oder zweiten Grades, nicht aber auf solche höheren Grades.

2. Strecken bezw. Inhalte heissen Grössen erster bezw. zweiter Dimension, reine Zahlen sind von nullter Dimension. Sonach sind die Ausdrücke a, 2a, $a+b$, $ab:c$, $\sqrt{a^2+b^2}$, $a^2b:c^2$ . . . von der ersten Dimension; hingegen sind die Formen a^2, $2ab$, $a^2b:c$, $c\,.\,\sqrt{a^2-b^2}$ . . . von zweiter Dimension. Ein Ausdruck wird homogen genannt, wenn alle seine Glieder von gleicher Dimension sind; z. B. $3x^2+ax=bc$. Alle in der algebraischen Analysis geometrischer Aufgaben vorkommenden Ausdrücke sind homogen.

§ 128. Konstruktion algebraischer Ausdrücke.

1. Die Konstruktionen der Ausdrücke $x=a\pm b$, $x=m\,.\,a$, $x=a:m$, wo m eine Zahl ist, sind naheliegend.

2. Ist $x = ab : c$, so hat man auch $c : a = b : x$. Demnach ist x die vierte Proportionale zu a, b, c.

3. Findet man $x = \sqrt{a \cdot b}$, so ist x die mittlere Proportionale zu a, b.

4. Ergiebt die Rechnung $x = \sqrt{a^2 + b^2}$, so erkennt man, dass x die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist, dessen Katheten gleich a, b sind. Wird $b = a$, so ist $x = a \cdot \sqrt{2}$.

5. Der Ausdruck $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ wird in der Weise hergestellt, dass man die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks gleich a und eine der beiden Katheten gleich b macht. Die andere Kathete ist gleich x.

6. Ist a die Seite eines gleichseitigen Dreiecks, so ist die Höhe $x = \frac{a}{2}\sqrt{3}$.

7. Bedeutet m eine positive Zahl, so lassen sich alle Ausdrücke von der Form $x = a \cdot \sqrt{m}$ mit Hilfe eines rechtwinkligen Dreiecks konstruieren. Z. B. ist $x = a\sqrt{5} = \sqrt{a^2 + 4a^2}$.

8. Ist in Fig. 86 $AC = a$, so erhält man für CO den Wert $\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2} a \cdot \sqrt{5}$; dann ist $CF = CD = \frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$. Der Ausdruck $x = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$ sagt demnach aus, dass x der Maior der stetig geteilten a ist.

9. Zusammengesetzte Ausdrücke werden so umgestaltet, dass sie aus mehreren einfachen Formen bestehen.

Erstes Beispiel. $x = abc : d^2$. Man hat $x = \frac{ab}{d} \cdot \frac{c}{d}$.

Setzt man $\frac{ab}{d} = y$ und bestimmt y nach Nr. 2, so ist $x = \frac{yc}{d}$.

Zweites Beispiel. $x = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + 2b^2}$. Man findet $x = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (b\sqrt{2})^2}$.

Ermittle $y = b\sqrt{2}$ nach Nr. 4, suche alsdann $z = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + y^2}$ ebenfalls mittelst Nr. 4; nun ist $x = -\frac{a}{2} + z$.

§ 129. Untersuchung des für x gefundenen Ausdrucks.

1. Unmöglich ist die Aufgabe, wenn der für x gefundene Wert a) nicht innerhalb der für die fragliche Strecke vorhandenen Grenzen fällt; b) negativ ist, während die gesuchte Strecke eine absolute Grösse sein soll; c) imaginär ist.

2. Ein negativer Wert für die Unbekannte x ist nur in dem Fall brauchbar, wenn die Lage der fraglichen Strecke in entgegengesetzter Richtung auch den Bedingungen der Aufgabe genügt.

3. Da jede quadratische Gleichung zwei Wurzeln hat, so ist in solchen Fällen eine weitere Untersuchung anzustellen, ob beide Werte des x der vorliegenden Aufgabe entsprechen oder nur einer. Ein ausgeschlossener Wert genügt meistens einer verwandten Aufgabe oder der vorliegenden Aufgabe in allgemeinerer Fassung.

§ 130. Aufgaben.

1. Beispiel. C ist die Mitte der Strecke AB. Man hat über AB, AC und BC als Durchmesser Halb-

kreise nach derselben Seite errichtet. Es soll der Kreis konstruiert werden, welcher die drei Halbkreise berührt. — Fig. 109.

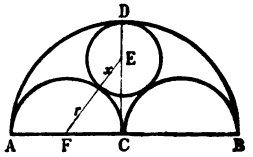


Fig. 109.

Analysis. Es sei E der Mittelpunkt des gesuchten Kreises. Dieser wird den Halbkreis AB in dem Punkte D berühren, woher es kommt, dass CED eine Gerade ist. Halbiert man AC in F, so geht FE durch den Berührungspunkt der beiden Kreise F und E. Nun werde der Radius AF mit r, der Radius ED mit x bezeichnet. In dem rechtwinkligen $\triangle$ EFC ist $(r + x)^2 = r^2 + (2r - x)^2$ oder $r^2 + x^2 + 2rx = r^2 + 4r^2 + x^2 - 4rx$. Hieraus $x = {}^2/_9 r$, woraus die einfache Konstruktion folgt.

2. Beispiel. Das Trapez ABCD durch die Gerade parallel den Grundseiten zu halbieren. — Fig. 110. —

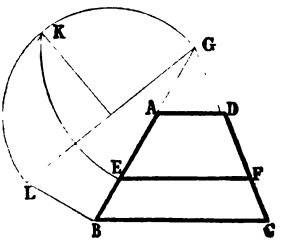


Fig. 110.

Analysis. Es sei EF die gesuchte Halbierungslinie. Verlängere BA und CD bis zum Schnitt in G. Man bezeichne die Strecken GA, GE, GB mit a, x, b. Die Dreiecke GBC, GEF, GAD sind ähnlich; ihre Inhalte verhalten sich wie die Quadrate homologer Seiten, daher $GBC : GEF : GAD = b^2 : x^2 : a^2$; folglich verhält sich auch $(GBC - GEF) : (GEF - GAD) = (b - x^2) : (x^2 - a^2)$. Weil aber EF das Trapez halbieren soll, geht die Proportion in die Gleichung über $b^2 - x^2 = x^2 - a^2$. Die Auflösung derselben liefert den Wert $x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.

Konstruktion. Errichte das Lot BL auf BG und mache es gleich AG. Die Verbindungsstrecke GL ist gleich $\sqrt{a^2 + b^2}$. Beschreibe über GL als Durchmesser den Halbkreis und errichte auf GL das Mittellot; beide Linien treffen sich in K. Um G schlage einen Kreis mit GK; dieser schneidet GB in E, ziehe durch E die Parallele zu BC, welche CD in F schneidet, so ist EF die verlangte Gerade.

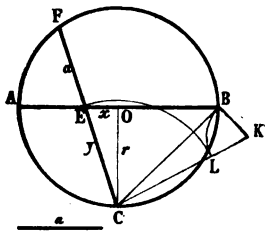


Fig. 111.

3. Beispiel. In dem Kreise O wurde der Durchmesser AB gezogen, und der eine Halbkreis in C halbiert. Man soll durch C eine den Durchmesser in E und den anderen Halbkreis in F schneidende Gerade so ziehen, dass EF = a werde.

Analysis. Fig. 111. Es sei CEF die gesuchte Gerade. Man bezeichnet OC mit r, CE mit y, OE mit x. Das rechtwinklige △ CEO liefert die Beziehung $y^2 = r^2 + x^2$. In dem Punkte E schneiden sich die Sehnen CF und AB; mithin gilt die Relation $ay = (r + x)(r - x) = r^2 - x^2$. Addiert man beide Gleichungen, so kommt $y^2 + ay = 2r^2$; folglich ist

$$y = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + 2r^2}.$$

Weil die Strecke y eine absolute Grösse ist, ist das negative Zeichen vor der Wurzel nicht brauchbar.

Konstruktion. Ziehe CB. Diese Strecke ist gleich $r \cdot \sqrt{2}$; errichte das Lot BK auf CB gleich $\frac{a}{2}$ und verbinde C mit K, welche Strecke gleich $\sqrt{\frac{a^2}{4} + 2r^2}$

sein wird. Von KC ziehe $KL = \frac{a}{2}$ ab, so ist der Rest $CL = CE = y$. Beschreibe mit y um C einen Bogen, der AB in E schneidet, ziehe CE mit Verlängerung. Es ist CEF die gewünschte Gerade.

Bemerkung. Der um C mit y als Radius beschriebene Kreisbogen schneidet AB noch in einem zweiten Punkte dessen Verbindungslinie mit C ebenfalls eine Lösung der Aufgabe darstellt.

Untersuchung. Da $\sqrt{\frac{a^2}{4} + 2r^2}$ immer grösser als $\frac{a}{2}$ ist, so kann der Ausdruck für y niemals negativ werden. Der um C mit y beschriebene Bogen muss den Durchmesser AB schneiden, woher es kommt, dass y nicht kleiner als r sein darf. Unmöglich wird somit die Aufgabe, wenn $-\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + 2r^2} < r$ ist, oder $\sqrt{\frac{a^2}{4} + 2r^2} < r + \frac{a}{2}$; quadriert:

$$\frac{a^2}{4} + 2r^2 < r^2 + \frac{a^2}{4} + ar;$$

hieraus folgt $r^2 < ar$, oder auch $r < a$; ein Resultat, das durch eine geometrische Betrachtung sofort gewonnen wird.

§ 131. Uebungen.

1. Die Strecke AB stetig zu teilen.
2. Die Strecke AB in C so zu teilen, dass $AC \cdot BC = s^2$ werde.
3. Desgleichen, dass $AC^2 + BC^2 = s^2$ werde.
4. Gleichseitiges $\triangle$ aus $a + h$.
5. Das $\triangle$ ABC in ein gleichseitiges zu verwandeln.
6. Ein Quadrat zu zeichnen aus $e + a$ oder $e - a$.

7. Rechteck aus F und a + b, bezw. a — b.

8. Das ∠ ABC in ein anderes zu verwandeln, das dem gegebenen ∠ DEF ähnlich ist.

9. Das △ ABC durch eine Gerade parallel L in zwei Teile zu zerlegen, die sich wie m : n verhalten.

10. In einen Quadranten den Inkreis zu zeichnen.

11. In das Quadrat ABCD ein anderes Quadrat zu zeichnen, dessen Seite = s ist.

12. Um das Rechteck ABCD ein anderes zu beschreiben, dessen Seiten von denen des ersten überall gleichweit abstehen, so dass der Rahmen das m-fache des gegebenen Rechtecks ist.

13. In das rechtwinklige △ ABC ein Quadrat einzubeschreiben, so dass zwei Ecken auf die Hypotenuse fallen.

14. In das △ ABC ein Quadrat einzubeschreiben.

15. In das △ ABC ein Rechteck einzubeschreiben, dessen Inhalt gegeben ist.

16. Desgleichen, dessen Umfang gegeben ist.

17. In dem Kreise O ist der Durchmesser AB gezogen, in B ist die Tangente an den Kreis gelegt. Man soll durch A eine den Kreis in E und die Tangente in F schneidende Linie so ziehen, dass EF = a werde. (Apollonius: de inclinationibus.)

18. Einen Kreis zu beschreiben, der durch die Punkte A, B geht und aus der Geraden L eine Sehne = s ausschneidet.

19. In dem Kreis O wurde die Sehne AB gezogen und der kleinere Bogen in C halbiert. Man soll durch C eine die Sehne in E und den grösseren Bogen in F schneidende Linie zo ziehen, dass EF = a werde.

20. △ aus a, r, w_a.

21. Das Trapez ABCD durch eine Gerade parallel den Grundseiten in zwei Teile, die sich wie m : n verhalten, zu teilen.

Spamersche Buchdruckerei, Leipzig.

Grosse illustrierte Preisliste 19 B

Ausgabe 1900

(für Aquarellfarben, flüssige Tuschen und Zeichenutensilien)
mit Originalaufstrichen sendet zur Orientierung beim Einkauf kostenfrei

Günther Wagner

Fabriken Hannover und Wien

Gegründet 1838 **20. Ausgabe**

Präzisions-Reisszeuge

Rundsystem

Rundsystem

Clemens Riefler

Fabrik mathematischer Instrumente

Nesselwang und **München** (Bayern)

Gegründet 1841

Vielfach prämiirt

Illustrirte Preislisten gratis.

Sammlung Göschen.

Je in elegantem Leinwandband

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

103 **Wechselkunde** von Dr. Georg Funk.
Mit vielen Formularen.

104 **Oesterreich. Geschichte I.**
Von der Urzeit bis 1526 von Prof. Dr. Franz v. Krones.

105 **Oesterr. Geschichte II**
Von 1526 bis zur Gegenwart von Prof. Dr. Franz v. Krones.

106 **Forstwissenschaft** von Prof. Dr. Ad. Schwappach.

107 **Geschichte d. Malerei I.**
von Prof. Dr. Rich. Muther.

108 **Geschichte d. Malerei II.**
von Prof. Dr. Rich Muther.

109 **Geschichte d. Malerei III.**
von Prof. Dr. Rich. Muther.

110 **Geschichte d. Malerei IV.**
von Prof. Dr. Rich Muther.

111 **Geschichte d. Malerei V.**
von Prof. Dr. Rich. Muther.

114 **Klimalehre** von Prof. Dr. W. Köppen.

115 **Buchführung** von Oberlehrer Rob. Stern.

116 **Plastik** von Dr. Hans Stegmann.

117 **Griechische Grammatik**
I. Formenlehre von Prof. Dr. Hans Meltzer.

119 **Burgenkunde** von Hofrat Dr. O. Piper.

120 **Harmonielehre** von Musikdirektor A. Halm. Mit vielen Notenbeispielen.

121 **Geschichte der alten u. mittelalterlichen Musik** von Dr. A. Möhler. Mit zahlr. Abbildungen und Musikbeilagen.

Urteile der Presse über „Sammlung Göschen".

Deutsche Lehrerzeitg., Berlin: ..... Nach den vorliegenden Bändchen stehen wir nicht an, die ganze Sammlung aufs angelegentlichste nicht allein zum Gebrauch in höheren Schulen, sondern auch zur Selbstbelehrung zu empfehlen.

Natur: Es ist geradezu erstaunlich, wie es der rühmlichst bekannte Verlag ermöglicht, für so enorm billige Preise so vorzüglich ausgestattete Werkchen zu liefern. Das vorliegende Bändchen bringt in knapper und verständlicher Form das Wissenswerteste der Mineralogie zum Ausdruck. Sauber[illegible] Verständnis.

National-Zeitg. [illegible] schen Litteratur wohl noch nicht dagew[illegible] n fast 300 Seiten in vorzüglicher Druck[illegible] n Preis zu haben war, wie ihn die „Sam[illegible] ten Bande, Max

Math 5109.00
Ebene geometrie,
Cabot Science
003346986
3 2044 091 918 433